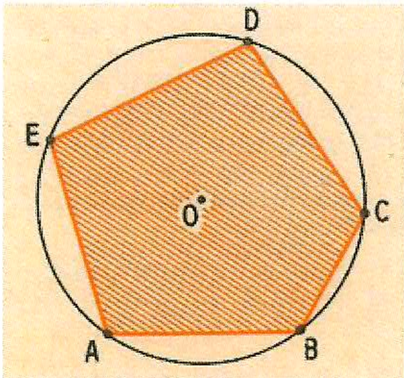
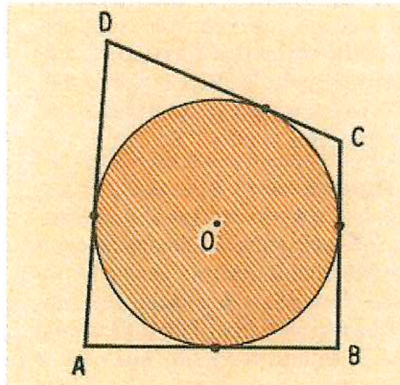
POLIGONI REGOLARI

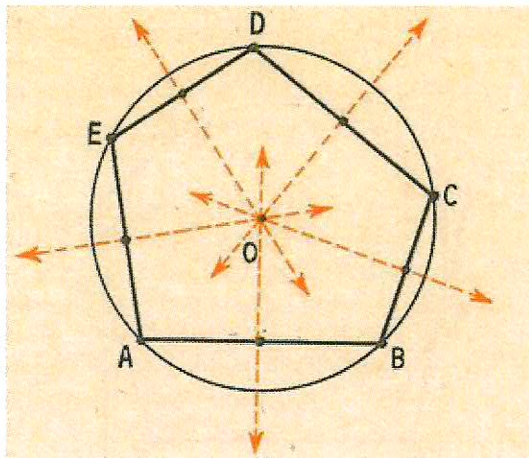
Definizioni

1) Un **poligono regolare** ha tutti i lati e tutti gli angoli eguali.
2) Un **poligono è iscritto in una circonferenza** se tutti i suoi vertici sono punti della circonferenza.
3) Un poligono è **circoscritto a una circonferenza** se tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza.





Teorema 1, diretto. Se un poligono è inscritto in una circonferenza, gli assi dei suoi lati passano per il centro della circonferenza.

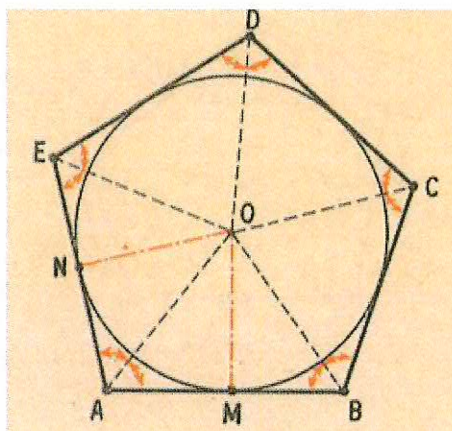


Per il teorema che dice che gli assi delle corde di una circonferenza passano per il centro, è evidente che tutti gli assi dei lati del poligono iscritto in una circonferenza, che sono corde, passano per il centro della circonferenza.

Teorema 1, inverso. Se gli assi di un poligono passano per il centro di una circonferenza, il poligono è inscritto nella circonferenza.

L'asse, infatti, è il luogo geometrico equidistante dagli estremi di un segmento; se questo centro è di un poligono, significa che i vertici del poligono sono tutti equidistanti dal centro e possono essere quindi i punti di passaggio di una circonferenza, il luogo geometrico equidistante da un punto detto centro.

Teorema 2 diretto. Se un poligono è circoscritto a una circonferenza, le sue bisettrici passano per uno stesso punto che è il centro della circonferenza.

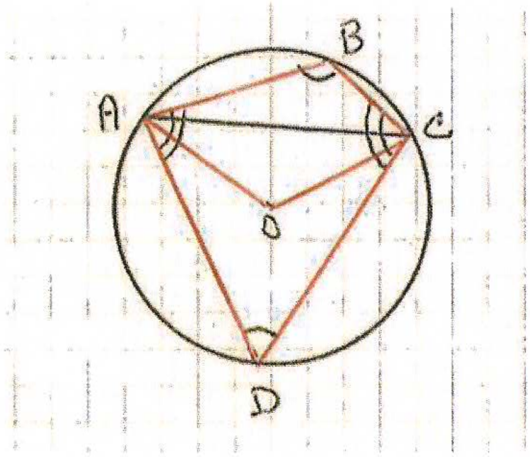


Si considerino ad esempio i lati del poligono EA e AB tangenti alla circonferenza e si unisca il punto di tangenza con il centro della circonferenza, NO e OM, perpendicolari entrambi ai lati, dunque **distanze**, e poi **raggi** per teorema. Si proceda così per tutti i lati di tangenza che s'incontreranno in un unico punto che è il centro della circonferenza. Ricordando che la bisettrice di un angolo è il luogo geometrico dei punti equidistanti dai lati dello stesso angolo, si conclude che O, oltre a essere il centro della circonferenza, è un punto che appartiene a tutte le bisettrici degli angoli del poligono perché equidistante da tutti i lati dello stesso poligono. C.v.d.

Teorema 2 inverso. Se le bisettrici di un poligono passano tutte per uno stesso punto, il poligono e circoscrittibile a una circonferenza e quel punto è il centro della circonferenza.

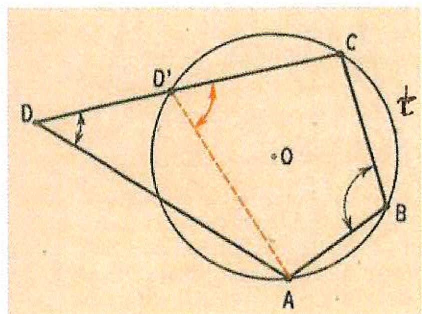
Se le bisettrici di un poligono passano tutte per lo stesso punto, vuol dire che quel punto è equidistante da tutti i lati del poligono. Ma se equidistante, quel punto può diventare il centro di una circonferenza che ha come tangenti i lati del poligono e come distanze i raggi.

Teorema 3 diretto. Un quadrilatero inscritto in una circonferenza ha gli angoli opposti supplementari.



- Si consideri il quadrilatero ABCD. Gli angoli alla circonferenza ABC e ADC insistono sugli archi opposti ABC e ADC sottesi dalla stessa corda AC.
- I due angoli al centro dei due angoli alla circonferenza suddetti danno come risultante un angolo giro.
- Si sa però che gli angoli al centro sono il doppio dei rispettivi angoli alla circonferenza. Perciò $\widehat{ABC}+\widehat{ADC}$ = 1p=180°.

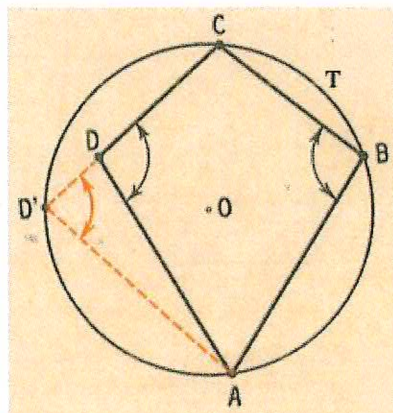
Teorema 3 inverso. Un quadrilatero se ha gli angoli opposti supplementari è inscrittibile in una circonferenza.



Ipotesi: $\hat{D}+\hat{B}$ = 180° **Tesi:** DCBA inscrittibile in t

Dimostrazione:

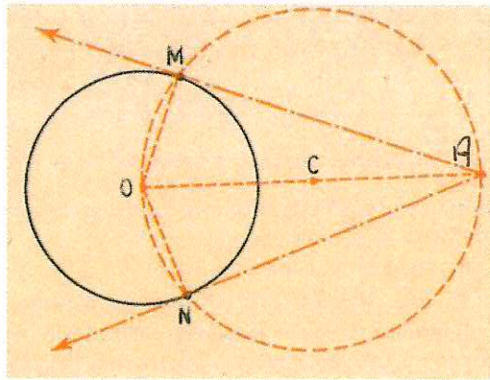
- Si proceda con un ragionamento **per assurdo**: ABCD non è inscrittibile in t.
- Per teorema un triangolo è sempre inscrittibile in una circonferenza, perciò t passerà di necessità per A, B, C; poi taglierà il lato DC del poligono in D' (se si pensa per assurdo che che il poligono non sia inscrittibile).
- Per lo stesso teorema diretto precedente avremo dunque: D'+B=180°; ma anche per ipotesi D+B=180°.
- Gli angoli D e D' risulterebbero eguali perché supplementari allo stesso angolo B. Ma l'angolo D' è supplementare agli angoli D + A del triangolo DD'A non solo a D. Il che è assurdo.



- Si deve perciò accogliere come vera la tesi che si è negata. C.v.d.

Lo stesso procedimento vale se si ipotizza per assurdo che il lato DC non sia secato dalla circonferenza, ma sia interno.

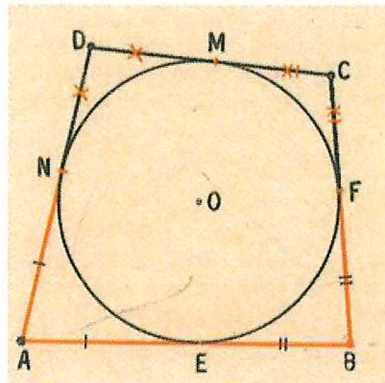
Problema. Prima di affrontare i teoremi successivi si valuti che da un punto esterno a una circonferenza, se si tracciano le tangenti alla circonferenza stessa, i segmenti che uniscono il punto iniziale ai punti di tangenza, sono eguali. >> **Tesi:** AM=AN



- Si uniscano i punti di tangenza M e N con il centro della circonferenza O. $\overset{\triangle}{OMA}=\overset{\triangle}{ONA}$ per il quarto criterio d'eguaglianza dei triangoli rettangoli: $\widehat{M}=\widehat{N}=90°$; $\overline{OM}=\overline{ON}$, raggio; $\overline{OA}$ in comune. In particolare $\overline{AM}=\overline{AN}$. C.v.d.

Teorema 4, diretto: Un quadrilatero circoscritto a una circonferenza ha la somma dei due lati opposti eguale alla somma degli altri due lati.

Tesi: $\overline{AD}+\overline{CB}=\overline{DC}+\overline{AB}$

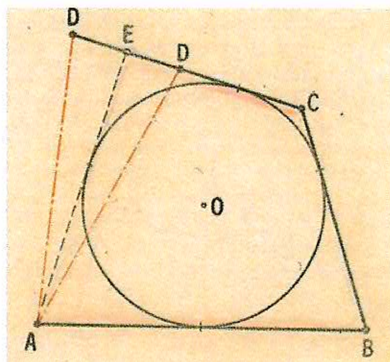


Dimostrazione: Per il teorema precedente si sommino membro a membro le seguenti eguaglianze:

$$\begin{array}{ccc}
\overline{NA} & = & \overline{AE} \\
\overline{ND} & = & \overline{DM} \\
\overline{CF} & = & \overline{MC} \\
\underline{\overline{FB}} & \underline{=} & \underline{\overline{BE}} \\
\overline{AD}+\overline{CB} & = & \overline{DC}+\overline{AB}
\end{array}$$

C.v.d.

Teorema 4, inverso: Un quadrilatero la cui somma dei due lati opposti è eguale alla somma degli altri due lati, è circoscrivibile a una circonferenza.



Ipotesi: $\overline{BC}+\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{CD}$

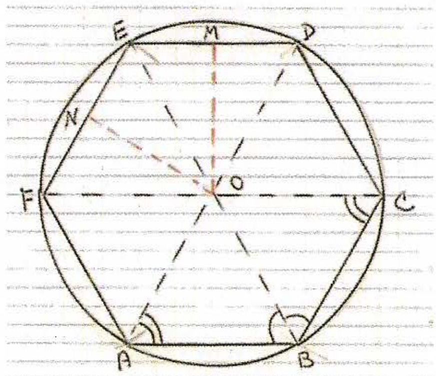
Tesi: ABCD circoscrittibile a una circonferenza

Dimostrazione:

- Si proceda con un ragionamento per assurdo negando la tesi.
- Il quadrilatero sarà dunque circoscrittibile su tre lati e non sul terzo $\overline{AD}$.
- Da A però si può tracciare un segmento tangente alla circonferenza AE.
- Per il teorema diretto precedente $\overline{AE}+\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{CE}$. Ma $\overline{CE}=\overline{CD}+\overline{DE}$ e sostituisco:
- $\overline{AE}+\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{DE}$ (1)
- Si consideri il triangolo ADE. Per il teorema che dice che in un triangolo la somma dei due lati è maggiore del terzo, si può scrivere: $\overline{AD}+\overline{DE}>\overline{AE}$ (2)
- Si sommi la (1) con la (2): $\cancel{\overline{AE}}+\overline{BC}+\overline{AD}+\cancel{\overline{DE}}>\overline{AB}+\overline{CD}+\cancel{\overline{DE}}+\cancel{\overline{AE}}$

L'uguaglianza risulta però in contrasto con l'ipotesi e dunque negare la tesi porta a un assurdo che giustifica la tesi stessa. C.v.d.

Si procede allo stesso modo se si supponesse il lato AD non secante ma esterno alla circonferenza.



Teorema 5: Un poligono regolare è sempre inscrittibile e circoscrivibile a una circonferenza.

Ipotesi: ABCDEF poligono regolare: tutti gli angoli e tutti lati eguali.

Tesi: ABCDEF inscrittibile e circoscrittibile in/da una circonferenza

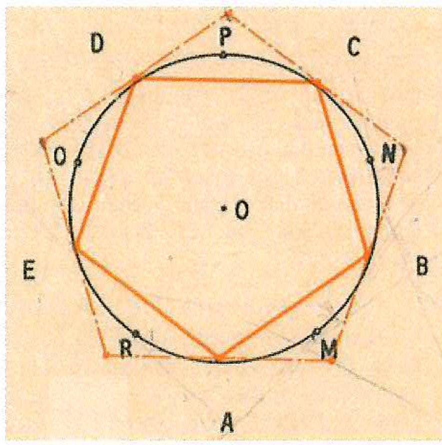
Dimostrazione:

A)inscrittibile

- Si traccino le bisettrici degli angoli FAB e ABC che necessariamente si devono incontrare in un punto O (se non s'incontrassero sarebbero bisettrici di angoli piatti e il poligono sarebbe costituito da tutti angoli piatti... impossibile).
- Si unisca ora O con C, $\widehat{AOB} = \widehat{BOC}$ per il primo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\overline{AB}=\overline{BC}$ per ipotesi; $\overline{OB}$ in comune; $\widehat{OBA}=\widehat{OBC}$ per costruzione. In particolare $\widehat{OCB}=\widehat{OAB}$.
- Per ipotesi però gli angoli del poligono sono tutti eguali perciò $\overline{OC}$ è anche bisettrice di $\widehat{C}$; così per lo stesso ragionamento si può dimostrare che anche tutte le altre bisettrici passano per O.
- Considerando poi tutti i triangoli formati dalle bisettrici, abbiamo una serie di angoli alla base eguali che ci presentano una serie di lati obliqui eguali perché tutti di triangoli isosceli; $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$...
- Tutti questi lati degli isosceli però possono anche essere raggi della circonferenza circoscritta al poligono.

B)circoscrittibile

- Per ipotesi i lati dell'esagono sono eguali. Ma corde eguali hanno la stessa distanza dal centro di un ipotetico cerchio. Perciò se $\overline{OM}=\overline{ON}$ ed eguali sono tutte le altre distanze, le distanze possono essere il raggio di una circonferenza inscrittibile nel poligono. C.v.d.

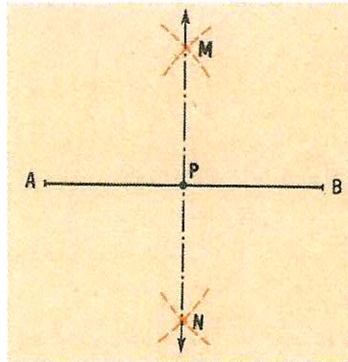


Teorema 6. Se si divide una circonferenza in n parti eguali e si congiungono i punti di divisione, si ottiene un poligono regolare iscritto.

Teorema 7. Se si divide una circonferenza in n parti eguali e nei punti di divisione si conducono le tangenti alla circonferenza, si ottiene un poligono regolare circoscritto a essa.

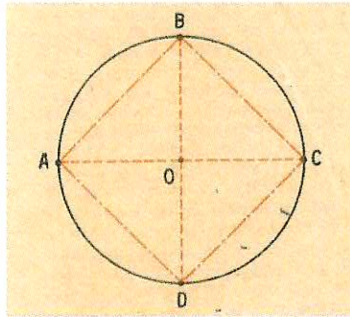
ALCUNE COSTRUZIONI CON RIGHELLO E COMPASSO

Costruzione dell'asse di un segmento:



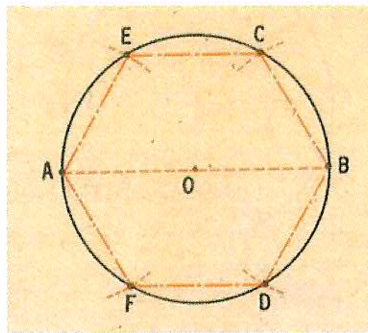
Considerando che l'asse di un segmento è il luogo geometrico equidistante dai suoi estremi, è sufficiente con una apertura del compasso a piacere puntare su A e poi su B e segnare i punti d'incontro delle circonferenze, M e N.

Costruzione di un quadrato inscritto in una circonferenza.



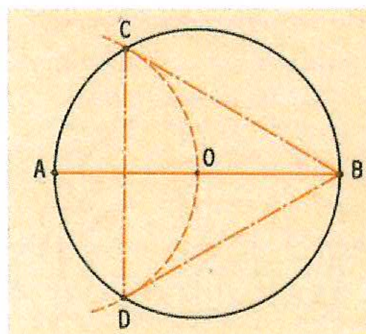
Dopo aver tracciato una circonferenza, il suo diametro e il suo asse, unire i punti d'intersezione degli stessi con la circonferenza.

Costruzione di un esagono regolare inscritto in una circonferenza.



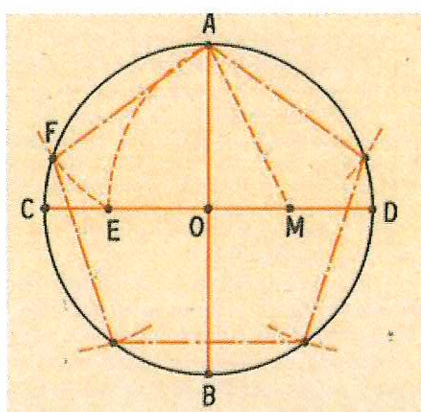
Considerando che il lato dell'esametro regolare inscritto in una circonferenza è eguale al raggio della circonferenza, è sufficiente riportare sulla stessa con il compasso la misura del raggio e poi unire tutti i punti d'intersezione.

Costruzione di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza.



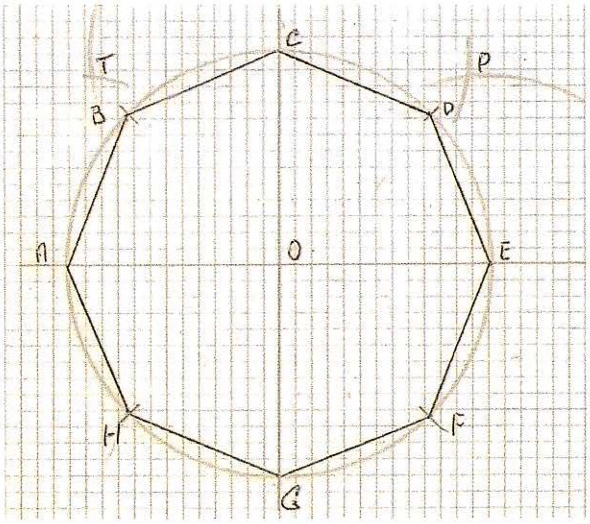
E' sufficiente tracciare le diagonali di un esametro, oppure più semplicemente, dopo aver tracciato una circonferenza con il suo diametro, puntare sull'estremo del diametro con apertura raggio e segnare la circonferenza. $\overset{\frown}{CA}$ è un lato, le congiunzioni con B da C e da D sono gli altri due lati.

Costruzione di un pentagono regolare inscritto in una circonferenza.



Si veda la figura a fianco. Si tracci la circonferenza e due diametri perpendicolari. Si trovi il punto medio del raggio OD; con apertura $\overline{AM}$ e centro M, s'intersechi il raggio opposto OC in E; con apertura $\overline{AE}$ e centro A si segni la circonferenza in F. $\overline{AF}$ è la misura del lato del pentagono che sarà riportato sulla circonferenza.

Costruzione di un ottagono regolare inscritto in una circonferenza.



Si ricordi che l'ottagono ha un numero doppio di lati del quadrato. Tracciata così la circonferenza e due diametri perpendicolari che segnerebbero i vertici di un quadrato, segnare con il compasso, facendo centro in E e C, con apertura a piacere, il punto medio dell'arco CE. Così per l'arco AC. Congiungere P con O, T con O e proseguire nei quadranti opposti.
I tagli ottenuti sulla circonferenza sono i vertici dell'ottagono.

ESERCIZI

1) Dimostrare che, se un trapezio isoscele è circoscritto a una circonferenza, il lato obliquo è eguale alla semisomma delle basi; e inoltre che il lato obliquo è l'ipotenusa del triangolo rettangolo che ha come cateti i segmenti che uniscono il centro della circonferenza con gli estremi del lato obliquo.
2) Dimostrare che l'ipotenusa di un triangolo rettangolo è eguale alla somma dei cateti diminuita del diametro della circonferenza iscritta.
3) Dato un triangolo rettangolo, tracciare sui due cateti due circonferenze aventi per diametri i cateti stessi e verificare che sono tangenti internamente alla circonferenza avente per centro il punto medio dell'ipotenusa e per raggio la semisomma dei cateti.
4) Dai punti P e P' d'intersezione di due circonferenze condurre le parallele alla congiungente i centri O e O' che incontrano le circonferenze, rispettivamente nei punti A e B, C e D. Dimostrare che il quadrilatero ABCD è un parallelogrammo rettangolo.
5) Dalle estremità A e B di un arco di circonferenza, si traccino i raggi e li si prolunghino fino a incontrare la circonferenza nel semicerchio opposto in A' e B'. Da A' e B', si traccino due archi eguali ad AB, A'D e B'C. Unire C a D e dimostrare che CD è parallelo ad AB.
6) Se due circonferenze sono tangenti esterne, e con il vertice del punto di contatto si tracciano due angoli opposti al vertice, dimostrare che sono parallele le corde sottese dagli archi sui quali insistono.
7) Dimostrare che se si congiunge un punto E del prolungamento della diagonale minore AC di un rombo ABCD con i vertici B e D, si ottiene un quadrilatero ABED circoscrittibile e che i punti di contatto con la circonferenza sono vertici di un trapezio isoscele.
9) Dimostrare che se con centro nel vertice A di un triangolo isoscele ABC si descrive una circonferenza che taglia la base nei punti D e E, i segmenti BD e CE sono eguali.
10) Date due circonferenze eguali e secanti, condurre una retta perpendicolare alla congiungente i centri O e O' che tagli una circonferenza nei punti A e D e l'altra nei punti B e C. Dimostrare che AB=CD.
11) Dimostrare che le diagonali condotte da uno dei vertici di un pentagono regolare dividono l'angolo in tre parti eguali.
12) Dimostrare che se due diagonali di un pentagono regolare s'intersecano, la parte maggiore di ciascuna di esse è eguale al lato del pentagono stesso.
13) Dimostrare che in un esagono regolare una diagonale, se è anche diametro, divide l'esagono in due trapezi isosceli eguali.
14) Dimostrare che prolungando i lati AB e DC di un ottagono regolare fino a incontrarsi in un punto R, il quadrilatero AOCR, essendo O il centro della circonferenza circoscritta all'ottagono, è inscrittibile in una circonferenza.