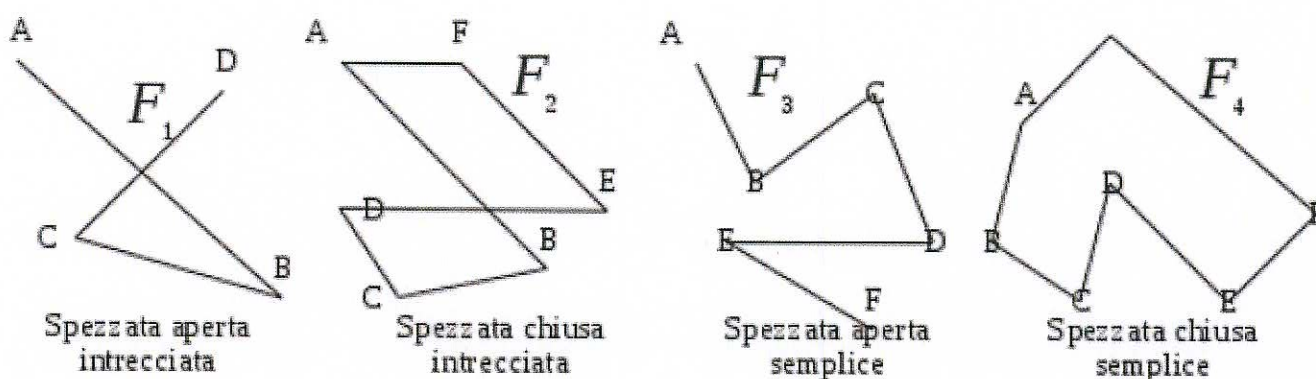


POLIGONI ED EGUAGLIANZA DEI TRIANGOLI

Definizioni:

Linea spezzata o poliginale: è una linea costituita da due o più segmenti di uno stesso piano, tra loro consecutivi. Può essere:

- a) aperta: se l'estremo di uno dei suoi lati non coincide con l'estremo di un altro lato;
- b) chiusa: se l'estremo di uno dei suoi lati coincide con l'estremo di un altro lato;
- c) intrecciata: se uno o più lati hanno in comune un punto che non è un vertice della poligonale.



Poligono: è la parte finita di piano limitata da una poligonale chiusa. Può essere:

- a) convesso: se i prolungamenti dei suoi lati cadono al di fuori della poligonale (F1);
- b) concavo: se anche un solo prolungamento dei suoi lati cade dentro la poligonale (F2);
- c) intrecciato o complesso: se ha come contorno una poligonale intrecciata (F3).

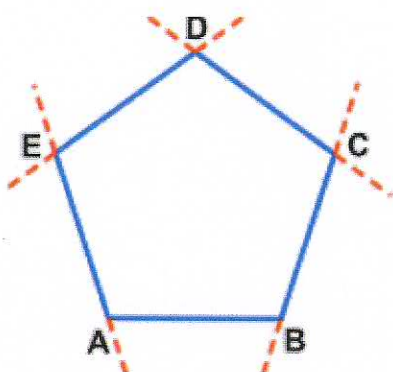


Figura 1

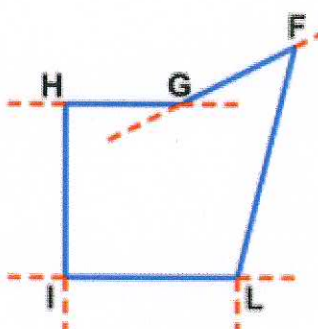


Figura 2

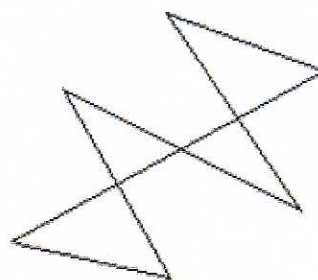
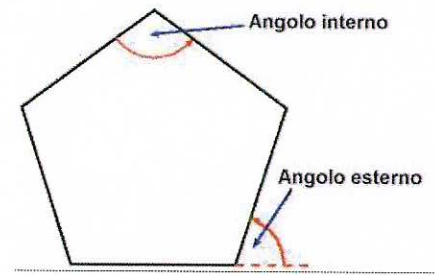


Figura 3

L'Angolo esterno di un poligono convesso è un angolo adiacente a un angolo interno, determinato dal prolungamento di un lato e dal lato a esso consecutivo.



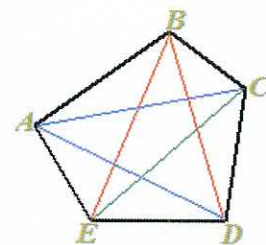
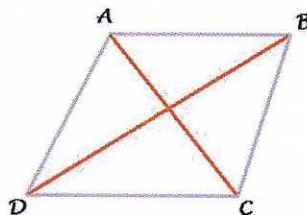
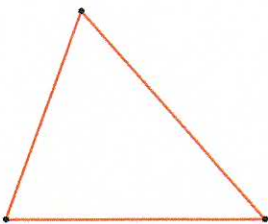
I poligoni prendono il nome dal numero dei loro lati o dei loro angoli, quadrilatero o quadrangolo, anche se non sempre sono in uso entrambe le diciture: triangolo perciò e non trilatero.

Perimetro di un poligono: è il segmento somma di tutti i suoi lati.

Diagonale di un poligono: è il segmento che ha come estremi due vertici del poligono non consecutivi.

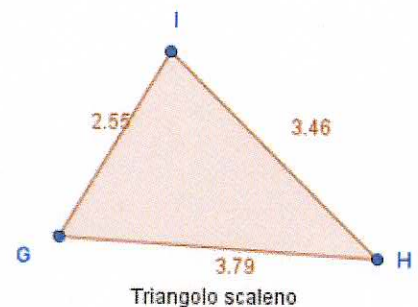
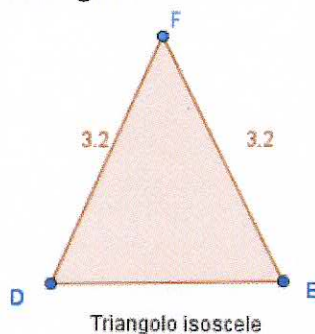
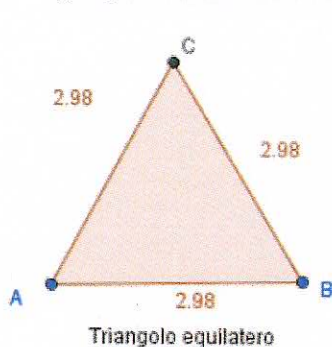
Il numero delle diagonali di un poligono è dato dalla seguente formula:
dove "n" è il numero dei lati del poligono stesso.

$$\frac{n(n-3)}{2}$$



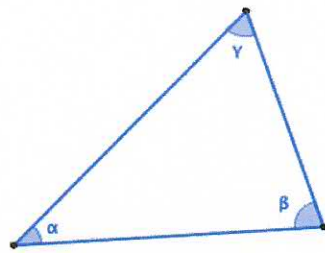
Il poligono più semplice è il **triangolo** che rispetto ai lati può essere:

- a) scaleno: se ha tutti i lati disuguali;
- b) isoscele: se ha due lati eguali;
- c) equilatero: se ha tutti i tre lati eguali.

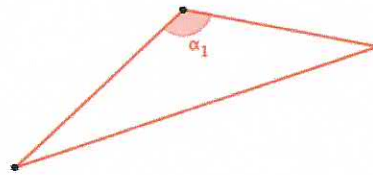


Rispetto agli angoli può essere:

- a) acutangolo: se ha tutti i tre angoli acuti;
- b) ottusangolo: se ha un angolo ottuso;
- c) rettangolo: se ha un angolo rettangolo.



Triangolo acutangolo:
 $0 < \alpha, \beta, \gamma < 90^\circ$



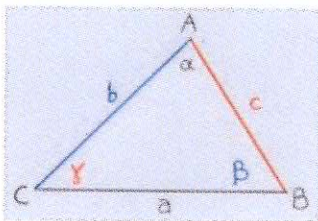
Triangolo ottusangolo:
 $90^\circ < \alpha_1 < 180^\circ$



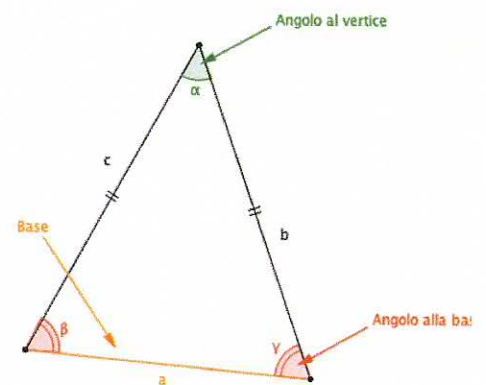
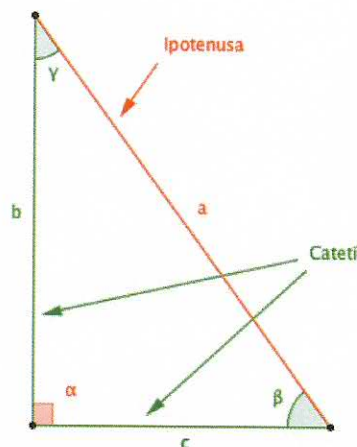
Triangolo rettangolo
 $\alpha_2 = 90^\circ$

Ancora **definizioni in riferimento ai componenti di un triangolo**:

- 1) Un vertice (un angolo) si dice opposto a quel lato cui non appartiene;
- 2) Un angolo si dice adiacente a un lato quando il suo vertice è un estremo del lato;
- 3) Un lato si dice comune a due angoli, se questi hanno per vertici gli estremi del lato;
- 4) La base di un triangolo può essere indifferentemente qualsiasi lato del triangolo;
- 5) Nel triangolo isoscele per lo più si definiscono "lati" i due lati eguali, e "base" il terzo lato; l'angolo opposto alla base è definito "angolo al vertice" o "vertice"; gli angoli opposti ai lati "angoli di base".
- 6) Nel triangolo rettangolo i lati dell'angolo retto sono definiti "cateti", il lato opposto all'angolo retto "ipotenusa".



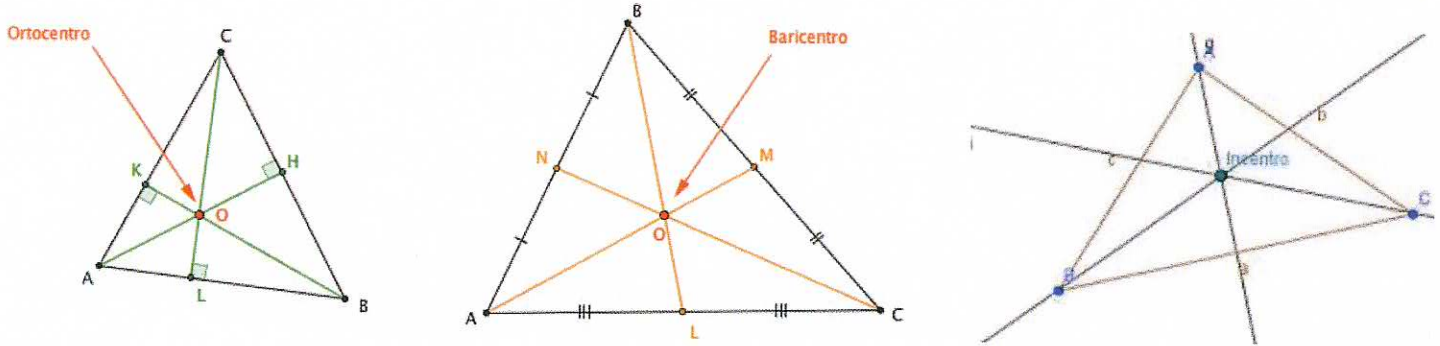
A opposto a $\overline{CB}$
C e B adiacenti ad $\overline{CB}$
 $\overline{CB}$ comune a C e B



- **L'altezza in un triangolo** è la distanza (segmento) di un vertice dalla retta che contiene il lato opposto. Le tre altezze di un triangolo s'intersecano tutte in un punto, l'**ortocentro**.

- **La mediana in un triangolo** è il segmento che unisce un vertice con il punto medio del lato opposto. Le tre mediane di un triangolo s'intersecano tutte in un punto, il **baricentro**.

- **La bisettrice in un triangolo** è il segmento compreso tra un angolo e il lato opposto. Le tre bisettrici di un triangolo s'intersecano tutte in un punto, l'**incentro**.

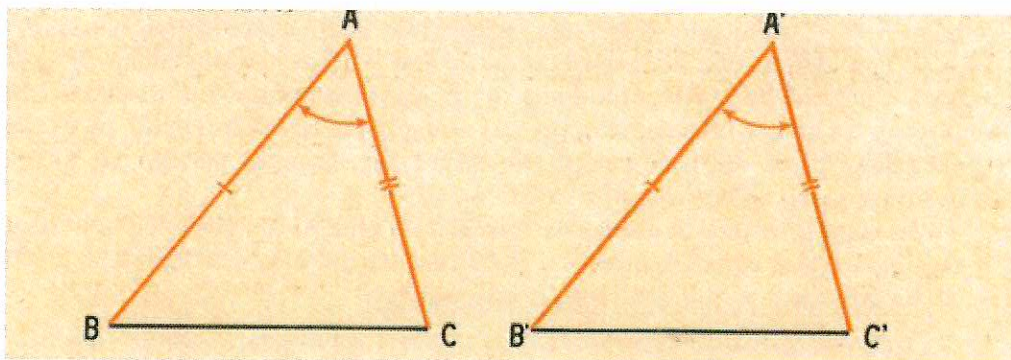


Uguaglianza dei triangoli

Due triangoli sono eguali se hanno i tre lati e i tre angoli rispettivamente eguali.

Primo criterio d'uguaglianza dei triangoli

Due triangoli sono eguali se hanno i due lati e l'angolo compreso dell'uno eguale ai due lati e all'angolo compreso dell'altro.



Ipotesi: $\overline{AB} = \overline{A'B'}$; $\overline{AC} = \overline{A'C'}$; $\hat{A} = \hat{A'}$

Tesi: $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$

Se si sovrappongono i due angoli eguali, A e A', coincideranno anche le semirette su cui giacciono i due lati dati come eguali per ipotesi; in particolare coincideranno gli estremi comuni: B con B' e C con C'. Coincidendo i tre vertici, coincideranno anche i triangoli che risultano quindi eguali.

Ne consegue che in due triangoli, dati tre elementi ordinatamente eguali, di cui uno almeno sia un angolo, agli angoli che per ipotesi sono eguali, si oppongono lati eguali, ai lati che per ipotesi sono eguali, si oppongono angoli eguali.

Teorema 1: in un triangolo isoscele gli angoli alla base sono eguali (gli angoli opposti ai lati eguali); e la bisettrice dell'angolo al vertice è anche mediana e altezza della base.

Ipotesi: $\overline{AB} = \overline{AC}$ (1)

Tesi: $\hat{B} = \hat{C}$

$\overline{BD} = \overline{DC}$; $\hat{ADB} = \hat{ADC} = 90^\circ$

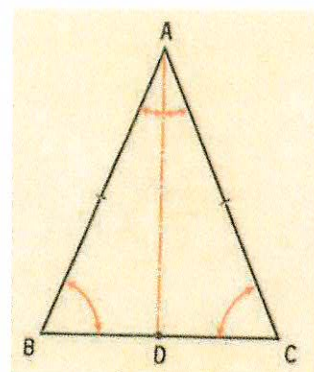
Dimostrazione:

Si tracci la bisettrice dell'angolo $\hat{A}$, AD e si considerino i triangoli ADB e ADC. Essi sono eguali per il Primo Criterio d'Eguaglianza, avendo $\overline{AB} = \overline{AC}$ per la (1); $\overline{AD}$ in comune; $\hat{BAD} = \hat{DAC}$ per costruzione.

Perciò risultano eguali $\hat{B}$ e $\hat{C}$;

Anche $\overline{BD} = \overline{DC}$. $\overline{AD}$ quindi è mediana.

Infine i due angoli ADB e ADC sono eguali, oltretutto adiacenti, risultano di 90° . Perciò AD è anche l'altezza relativa al lato di base. C.v.d.



Secondo criterio d'eguaglianza dei triangoli

Due triangoli sono eguali se hanno eguale un lato e i due angoli a esso adiacenti.

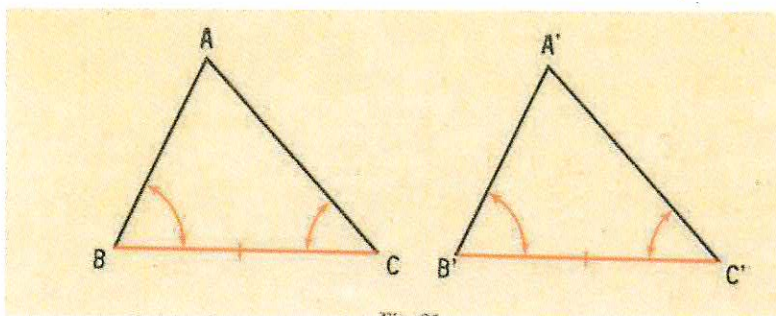
Ipotesi: $\overline{BC} = \overline{B'C'}$; $\hat{B} = \hat{B'}$; $\hat{C} = \hat{C'}$

Tesi: $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$

Dimostrazione:

Si sovrapponga il lato BC al lato B'C': corrispondono perfettamente per ipotesi. Corrispondono, sempre per ipotesi, anche gli angoli B con B' e C con C', così che le semirette AB e A'B' coincidono, come le semirette AC e A'C'.

La stessa inclinazione delle semirette le porterà a intersecarsi nello stesso punto, A e A', il terzo vertice dei due triangoli che con tutti i tre vertici corrispondenti risulteranno eguali. C.v.d.



Teorema 2: Un triangolo che ha due angoli eguali è isoscele (cioè ha eguali i lati opposti agli angoli eguali).

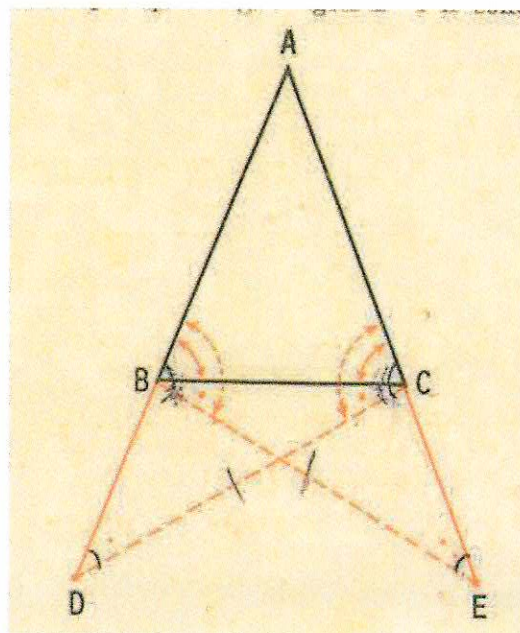
Ipotesi: $\hat{ABC} = \hat{ACB}$

Tesi: $\overline{AB} = \overline{AC}$

Dimostrazione:

Si prolunghino i lati AB e AC di due segmenti eguali, BD e CE.

Si considerino i triangoli BCD e CBE che risultano eguali per il primo criterio di uguaglianza, infatti:



$\overline{BC}$ è in comune; $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$ sono eguali per costruzione; $\angle DBC$ e $\angle BCE$ sono angoli eguali per differenza di angoli eguali: $180^\circ - \widehat{ABC}$ e $180^\circ - \widehat{ACB}$.

Si considerino ora i triangoli ADC e AEB che risultano eguali per il secondo criterio di uguaglianza, infatti: $\overline{BE} = \overline{CD}$ per la dimostrazione precedente; $\widehat{D} = \widehat{E}$ per la dimostrazione precedente; $\widehat{ACD} = \widehat{ABE}$ perché somma di angoli eguali.

Anche i lati AB e AC risultano quindi eguali. C.v.d.

Teorema 3: Un triangolo che ha i tre angoli eguali ha anche tre lati eguali.

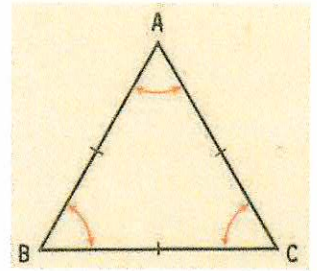
Ipotesi: $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$

Tesi: $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$

Dimostrazione: Con base $\overline{BC}$ e angoli adiacenti a $\overline{BC}$, B e C eguali, anche $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ sono eguali per il teorema precedente.

Se si considera la base del triangolo $\overline{AB}$, allora per le stesse ragioni, essendo $\widehat{A} = \widehat{B}$, anche $\overline{BC} = \overline{AC}$.

Per la proprietà transitiva: $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$. C.v.d.



Terzo criterio d'uguaglianza dei triangoli

Due triangoli sono eguali se i tre lati dell'uno sono rispettivamente eguali ai tre lati dell'altro.

Ipotesi: $\overline{AB} = \overline{A'B'}$; $\overline{AC} = \overline{A'C'}$; $\overline{BC} = \overline{B'C'}$

Tesi: $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$

Dimostrazione:

Si fa ruotare $\triangle A'B'C'$ di 180° attorno all'asse $B'C'$.

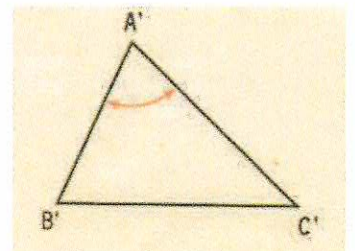
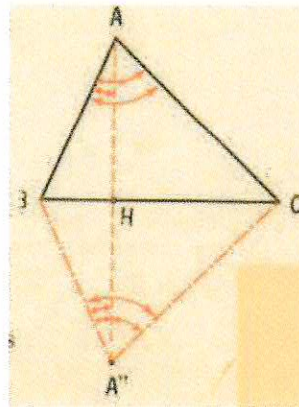
Si sovrappone a $\overline{BC}$, la base $\overline{B'C'}$, entrambe eguali per ipotesi, con tutto il triangolo ottenuto con la rotazione.

Si unisce $\widehat{A}$ ad $\widehat{A''}$.

I triangoli ABA'' e ACA'' sono isosceli per ipotesi. Sono dunque eguali gli angoli alla base $\widehat{BAH}$ e $\widehat{BA''H}$; così pure $\widehat{HAC}$ e $\widehat{HA''C}$.

Per somma di angoli eguali anche $\widehat{A} = \widehat{A''} = \widehat{A'}$.

I due triangoli considerati sono dunque eguali per il primo criterio d'uguaglianza.



ESERCIZI SECONDA LEZIONE

- 1) Dimostrare che, congiungendo un punto qualunque della bisettrice di un triangolo isoscele con gli estremi della base, si ottiene un altro triangolo isoscele.
- 2) Dimostrare che due quadrilateri sono eguali se hanno tre lati consecutivi e i due angoli compresi rispettivamente eguali.
- 3) Dimostrare che due triangoli isosceli sono eguali se hanno eguali rispettivamente la base e un lato.
- 4) Sulla base CB di un triangolo isoscele col vertice in A, si prendano due segmenti eguali BD e CE e si congiunga A con D e con E. Dimostrare che anche il triangolo ADE è isoscele
- 5) Dimostrare che sono eguali le bisettrici degli angoli alla base di un triangolo isoscele.
- 6) Dimostrare che un triangolo è isoscele se l'altezza e la mediana relative a uno dei tre lati coincidono.
- 7) Dato il triangolo isoscele ABC di vertice B, prolungare i lati BA e BC di due segmenti eguali AD e CE. dimostrare che:
 - 1) i triangoli ADC e ACE sono eguali;
 - 2) i triangoli BAE e BCD sono eguali;
 - 3) il triangolo AFC è isoscele, essendo F l'intersezione di DC con AE;
 - 4) La semiretta BF è bisettrice dell'angolo ABC;
 - 6) i triangoli ADE e CED sono eguali.