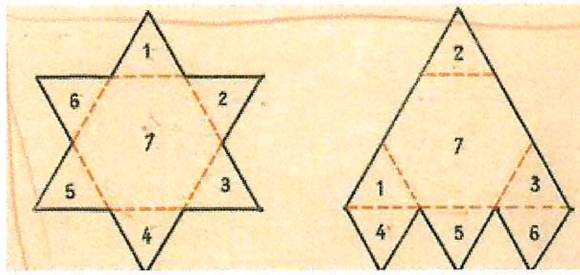
EQUIVALENZE

DEFINIZIONI

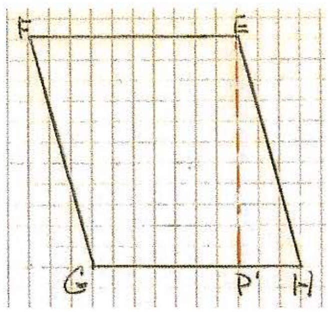
1) Due poligoni che hanno la stessa estensione (la stessa superficie) si dicono **equivalenti: ≡**
Se l'estensione del primo è maggiore di quella del secondo, si dice **prevalente: >**
Se l'estensione del primo è minore di quella del secondo, si dice **subvalente: <**

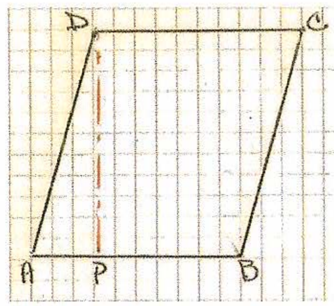


2) Due poligoni equivalenti, se sono somma di due o più poligoni disposti in modo diverso si dicono **equiscomponibili.** La condizione necessaria e sufficiente perché due poligoni siano equivalenti è che risultino equiscomponibili. L'equivalenza di due figure piane non si può definire sempre secondo il principio di equiscomponibilità, ma anche per eguaglianza di estensione, ad esempio un cerchio e un triangolo possono essere equivalenti ma non equiscomponibili.

Postulato di Zolt: una figura piana non può essere equivalente a una sua parte.

<u>Teorema fondamentale.</u> Due parallelogrammi che hanno rispettivamente eguali la base e l'altezza sono equivalenti.





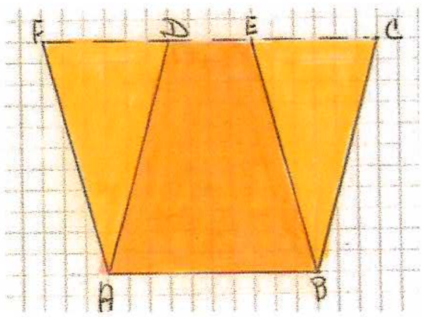
Ipotesi: $\overline{AB}=\overline{GH}$; $\overline{DP}=\overline{EP'}$;

Tesi: ABCD ≡ EFGH

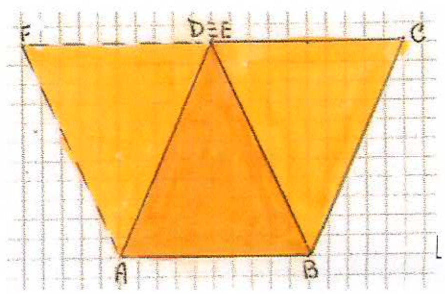
Dimostrazione:

- Su ABCD si riporti EFGH facendo corrispondere le basi $\overline{GH}$ e $\overline{AB}$. Il lato $\overline{EF}$ giacerà sulla stessa retta di $\overline{DC}$ e si potranno verificare tre casi distinti:

1) Il lato EF ha una parte in comune con $\overline{DC}$.



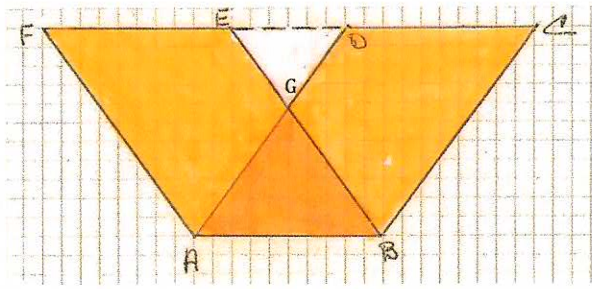
In questo caso i lati EB e DA decompongono i due parallelogrammi nel trapezio comune ABED e nei due triangoli BCE e ADF che sono eguali per il primo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\overline{AD}=\overline{BC}$, $\overline{AF}=\overline{BE}$ perché lati opposti di parallelogrammi; $\widehat{DAF}=\widehat{CBE}$ per avere lati paralleli e concordi.
ABCD ≡ EFGH perché equiscomponibili. C.v.d.



2) Il lato EF coincide con $\overline{DC}$, D≡E.
In questo caso i lati EB e DA decompongono i due parallelogrammi nel triangolo comune ABE≡D e nei due triangoli

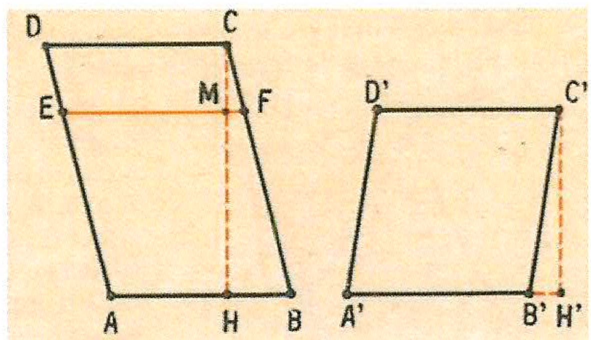
BCE e ADF che sono eguali per il terzo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\overline{AD}=\overline{BC}$, $\overline{AF}=\overline{BE}$ perché lati opposti di parallelogrammi; $\overline{DC}=\overline{EF}$ perché entrambi eguali alle basi, a loro volta eguali per ipotesi.
ABCD ≡ EFGH perché equiscomponibili. C.v.d.

3) Il lato EF non ha nessun punto in comune con $\overline{DC}$.



In questo caso i lati EB e DA decompongono i due parallelogrammi nel triangolo comune ABG e nei due triangoli AFD e BCE (da cui si deve sottrarre il triangolo comune EGD che non appartiene né all'uno né all'altro) che sono eguali per il terzo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\overline{BC}=\overline{AD}$ e $\overline{BE}=\overline{AF}$ perché lati opposti di parallelogrammi, $\overline{CE}=\overline{DF}$ perché somma di segmenti eguali.
ABCD ≡ EFGH perché equiscomponibili. C.v.d.

Teorema 1. Se due parallelogrammi hanno eguale base, ma l'altezza del primo è maggiore o minore dell'altezza del secondo, il primo è prevalente o subvalente al secondo.



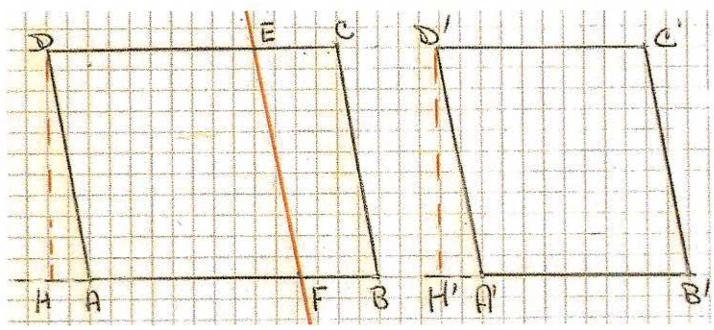
Ipotesi: $\overline{AB}=\overline{A'B'}$; $\overline{HC}>\overline{H'C'}$

Tesi: ABCD>A'B'C'D'

Dimostrazione:

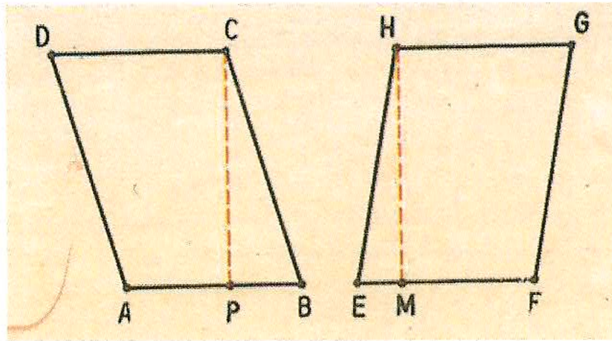
- Si stacchi su $\overline{CH}$ un segmento MH=C'H' e si conduca da F la parallela ad $\overline{AB}$.
- Per il teorema fondamentale ABFE≡A'B'C'D'.
- ABCD>ABFE perché quest'ultimo ne è evidentemente una parte.
- Ne segue che ABCD>A'B'C'D'.
- E viceversa A'B'C'D'<ABCD. C.v.d.

Teorema 2. Se due parallelogrammi hanno eguale altezza, ma la base del primo è maggiore o minore della base del secondo, il primo è prevalente o subvalente al secondo.



Si proceda come per il teorema precedente.

Teorema 3. Se due parallelogrammi sono equivalenti e hanno eguali le basi (le altezze), hanno eguali anche le corrispondenti altezze (le basi).



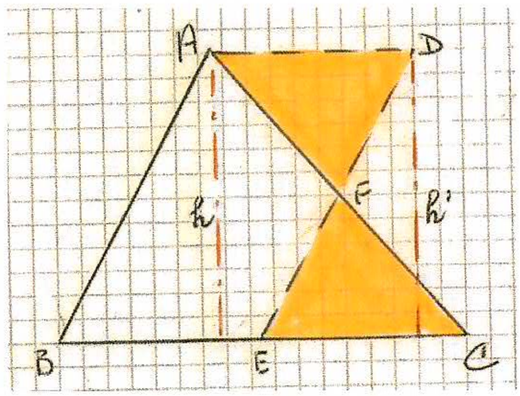
Ipotesi: ABCD≡EFGH; $\overline{AB}=\overline{EF}$

Tesi: $\overline{CP}=\overline{HM}$

Dimostrazione:

- Si proceda per assurdo: $\overline{CP}>\overline{HM}$
- Per i teoremi precedenti ne segue che ABCD>EFGH, ma la diseguaglianza è contro l'ipotesi.
- Lo stesso vale se si suppone $\overline{CP}<\overline{HM}$.
- Ne consegue che $\overline{CP}=\overline{HM}$. C.v.d.

Teorema 4. Un triangolo è equivalente a un parallelogrammo avente per base la metà della base del triangolo e per altezza la stessa altezza.



Ipotesi: $\overline{BC}=2\overline{BE}/\overline{EC}$; h=h'. **Tesi:** $\overset{\triangle}{ABC}$≡ABED

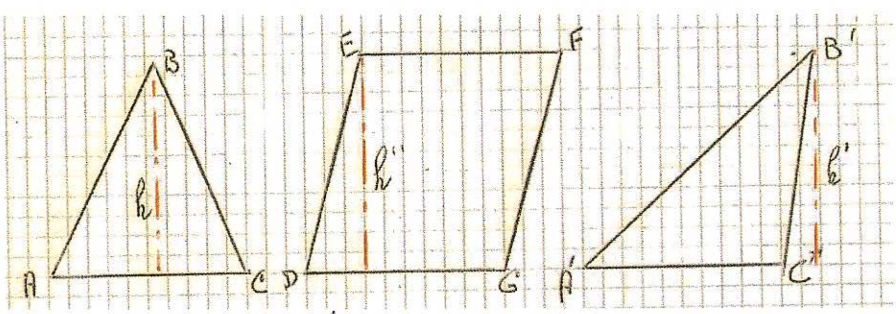
Dimostrazione:

Costruzione: Dopo aver individuato sulla base BC del triangolo ABC il punto medio E, si tracci per E la parallela ad $\overline{AB}$ e da A la parallela a $\overline{BC}$. Si ottiene un parallelogrammo ABED con $\overline{BE}=½\overline{BC}$ e h'=h.

- $\overset{\triangle}{ADF}=\overset{\triangle}{ECF}$ per il secondo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\overline{EC}=\overline{AD}$ per ipotesi e perché entrambi eguali a $\overline{BE}$; $\widehat{DEC}=\widehat{ADE}$ e $\widehat{DAC}=\widehat{ACE}$ perché alterni interni delle parallele AD e DC tagliate dalle trasversali DE e AC.

Dunque $\overset{\triangle}{ABC}$≡ABED perché equiscomponibili. C.v.d.

Il parallelogrammo diventa il termine medio di confronto per dire che tutti i triangoli che hanno la stessa base e la stessa altezza sono equivalenti.

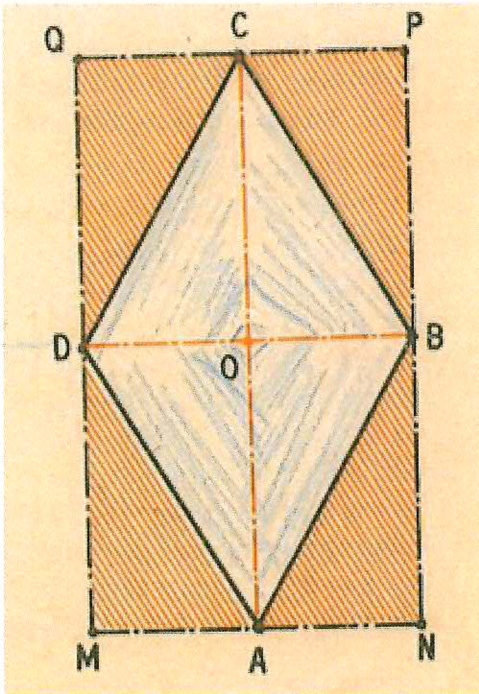


Ipotesi: $\overline{AC}=\overline{DG}=\overline{A'C'}$; h=h'=h''. **Tesi:** $\overset{\triangle}{ABC}$ ≡A'B'C'

Dimostrazione: Se $\overset{\triangle}{ABC}$ ≡ ½ DEFG e $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ ≡ ½ DEFG sarà $\overset{\triangle}{ABC}$ ≡$\overset{\triangle}{A'B'C'}$

Teorema 5. Un rombo è equivalente alla metà del rettangolo a esso circoscritto.

Ipotesi: $d1=\overline{MN}$; $d2=\overline{PN}$. **Tesi:** ABCD≡ ½MNPQ



Dimostrazione:

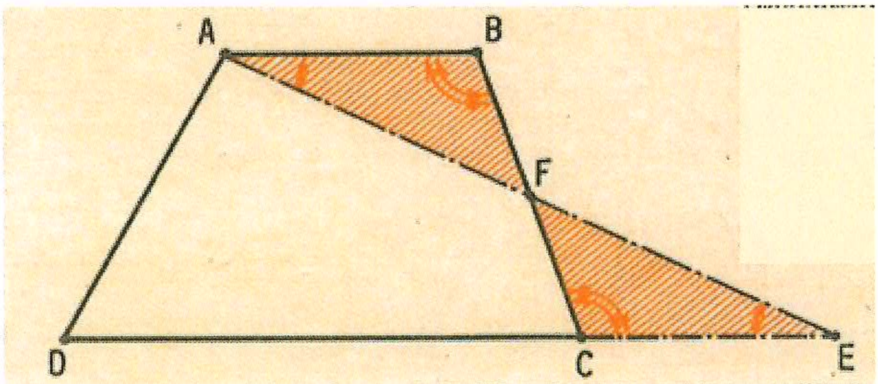
- Le diagonali del rombo dividono il rettangolo in altri quattro rettangoli eguali dove i lati del rombo fanno da diagonali e li dividono a loro volta in due triangoli eguali. Ad esempio il rettangolo AOBN, i cui lati sono tracciati da metà delle diagonali del rombo, è diviso in due triangoli eguali $\widehat{OBA}$ e $\widehat{ANB}$ dal lato del rombo BA perché per teorema la diagonale di un rettangolo divide il rettangolo in due triangoli retti eguali.

- Il rombo è la somma di quattro di questi triangoli e dunque risulta la metà del rettangolo che è composto da otto triangoli.

Ne segue: ABCD≡ ½MNPQ.

C.v.d.

Teorema 6. Un trapezio è equivalente a un triangolo che ha per base la somma delle basi del trapezio e per altezza quella stessa del trapezio.



Ipotesi: $\overline{DE}=\overline{DC}+\overline{AB}$.

Tesi: $\widehat{ADE} \equiv$ ABCD

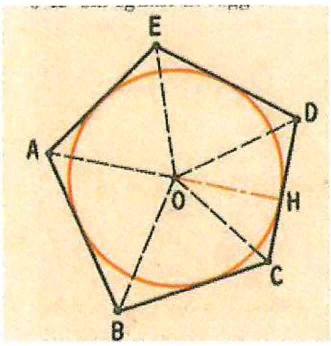
Dimostrazione:

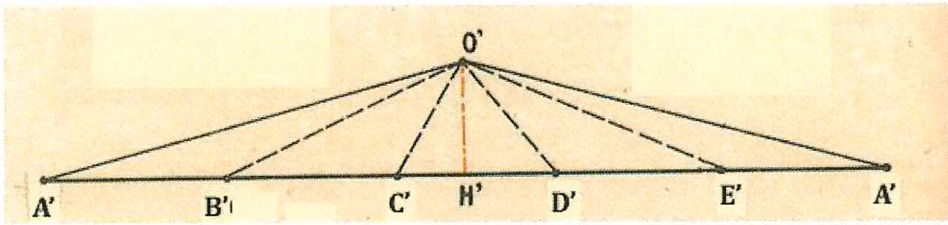
<u>Costruzione</u>: si prolunghi sulla stessa retta la base maggiore DC di $\overline{CE}=\overline{AB}$ e si congiunga A con E. Risulta un triangolo AED con altezza eguale a quella del trapezio e con base somma delle basi del trapezio.

- $\widehat{ABF}=\widehat{CFE}$ per il secondo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\overline{AB}=\overline{CE}$ per costruzione; $\widehat{ABF}=\widehat{FCE}$ e $\widehat{BAF}=\widehat{FEC}$ perché angoli alterni interni delle parallele AB e DC tagliate dalle trasversali BC e AE.

- Trapezio e triangolo risultano perciò equiscomponibili: $\widehat{ADE} \equiv$ ABCD. C.v.d.

Teorema 7. Un poligono circoscrittibile a una circonferenza è equivalente a un triangolo che ha per base il perimetro e per altezza il raggio della circonferenza.





Ipotesi: $\overline{OH}=\overline{O'H'}$; $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EA}=\overline{A'B'}+\overline{B'C'}+\overline{C'D'}+\overline{D'E'}+\overline{E'A'}$

Tesi: $ABCDE \equiv \widehat{A'O'A'}$

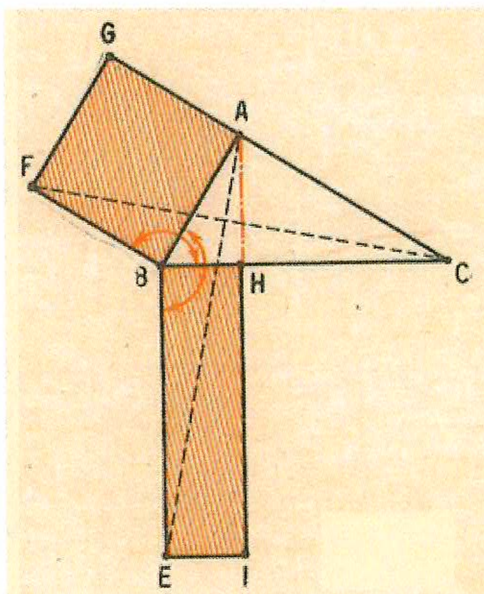
Dimostrazione:

- Se nel pentagono si uniscono i vertici con il centro della circonferenza, si ottengono cinque triangoli che hanno la stessa base e la stessa altezza dei triangoli di cui si compone il triangolo A'O'A'. Poiché composti da triangoli equivalenti $ABCDE \equiv A'\widehat{O'}A'$. C.v.d.

Poiché tutti i poligoni regolari sono circoscrittibili a una circonferenza, sono anche equivalenti a un triangolo che ha per base il perimetro del poligono e per altezza la sua apotema (= altezza dei singoli triangoli di cui è composto il poligono e raggio del cerchio inscritto).

<u>Primo teorema di Euclide.</u> In ogni triangolo rettangolo il quadrato che ha per lato un cateto è equivalente al rettangolo che ha per lati l'ipotenusa e la proiezione dello stesso cateto sull'ipotenusa.

Ipotesi: $\overline{BE}=\overline{BC}$;
$\widehat{BAC}=90°$
ABFG quadrato



Tesi: ABFG≡BHIE

Dimostrazione.

Costruzione: Si è costruito sul cateto AB un quadrato con il lato eguale ad $\overline{AB}$. Si è prolungata l'altezza AH di un segmento HI eguale all'ipotenusa; si è condotta da I la parallela a BC e da B la parallela ad HI e si è ottenuto un rettangolo avente per dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto BA sull'ipotenusa.

- Si unisca F con C e A con E, i due triangoli BFC e BAE sono eguali per il primo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\overline{BC}=\overline{BE}$ per costruzione, $\overline{AB}=\overline{FB}$ perché lati dello stesso quadrato, $\widehat{FBC}=\widehat{ABE}$ perché entrambi formati da un angolo retto a cui si è aggiunto $\widehat{ABC}$.

- Il quadrato ABFG ha la stessa base, FB, e la stessa altezza, AB, del triangolo FBC perciò **ABFG≡2**$\widehat{\mathbf{FBC}}$ per teorema.
- Il rettangolo BHIE ha la stessa base, BE, e la stessa altezza, BH, del triangolo BAE perciò **BHIE≡2**$\widehat{\mathbf{ABE}}$ per teorema.
- ABFG e BHIE sono così equivalenti entrambi al doppio di due triangoli eguali e dunque equivalenti tra di loro: ABFG≡BHIE. C.v.d.

Teorema inverso del primo teorema di Euclide. Se in un triangolo che ha due lati diseguali, tra i quali è compreso un angolo acuto, si verifica che il rettangolo che ha per dimensioni il lato maggiore e la proiezione del minore sul maggiore è equivalente al quadrato che ha per lato il minore, il triangolo è rettangolo e l'angolo retto è quello opposto al lato maggiore.

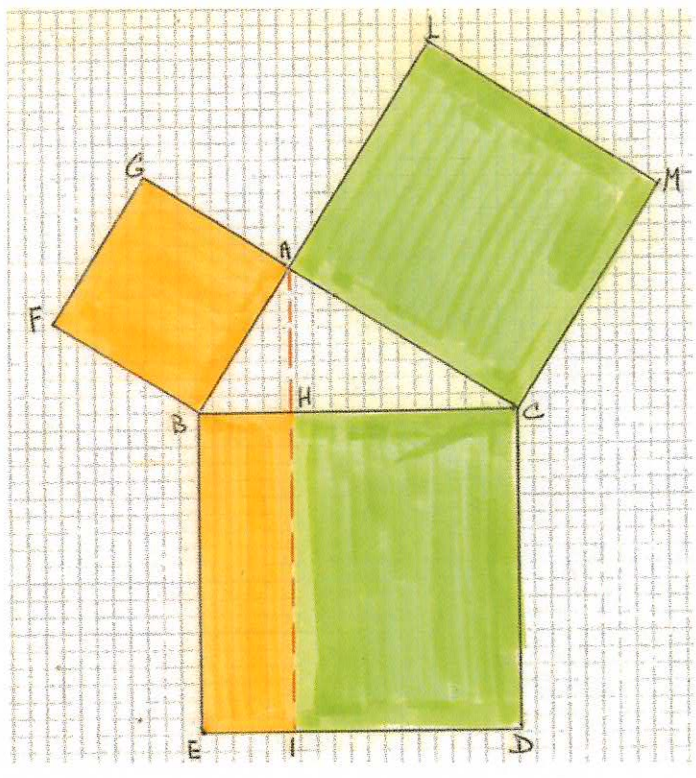
<u>Teorema di Pitagora</u>. In ogni triangolo rettangolo il quadrato che ha per lato l'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati che hanno per lati i cateti.

Senza dilungarsi più di tanto, dalla figura si evince che il teorema di Pitagora si dimostra applicando due volte il primo teorema di Euclide prima al cateto AB con proiezione BH e poi al cateto AC con proiezione HC. L'ipotenusa poi è riportata su $\overline{HI}$.

Si ha perciò: ABFG≡BHIE
ACML≡CHID

Sommando membro a membro:
ABFG+ACML≡BCDE

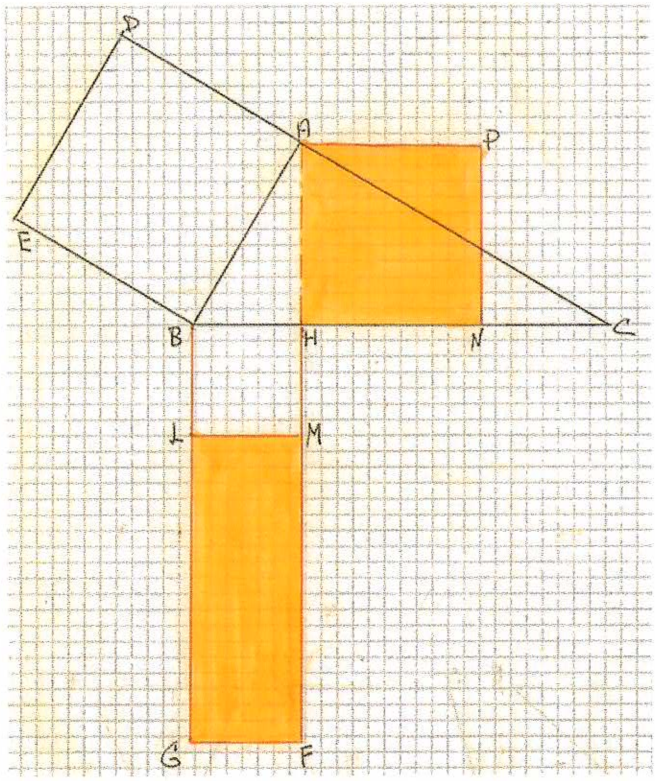
C.v.d.



Teorema inverso di Pitagora. Se in un triangolo un quadrato avente per lato quello maggiore è equivalente alla somma dei quadrati aventi per lati ciascuno dei rimanenti, il triangolo è rettangolo.

Corollario. In ogni triangolo rettangolo il quadrato avente per lato un cateto è equivalente alla differenza fra il quadrato avente per lato l'ipotenusa e il quadrato avente per lato l'altro cateto.

Secondo teorema di Euclide. In un triangolo rettangolo il quadrato che ha per lato l'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente a un rettangolo che ha per dimensioni le proiezioni dei singoli cateti sull'ipotenusa.



Ipotesi: $\overline{BG}=\overline{BC}$; $\overline{BH}=\overline{BL}$; $\overline{LG}=\overline{HC}$; $\overline{AH}=\overline{HN}$.

Tesi: AHNP≡FGLM

Dimostrazione:

- Si costruisca BHFG e si applichi il primo teorema di Euclide:

ABED≡BHFG (1)

- Si consideri il triangolo rettangolo ABH e gli si applichi il teorema di Pitagora:

ABED≡AHNP+BHML (2)

- Si applichi a (1) e a (2) la proprietà transitiva:

BHFG≡AHNP+BHML

- Si sottragga ai due membri BHML:

BHFG-BHML≡AHNP

- Dalla figura è chiaro che BHFG-BHML≡FGLM

- FGLM ha però come dimensioni $\overline{LM}=\overline{BH}$, la proiezione di $\overline{AB}$ sull'ipotenusa; e $\overline{LG}=\overline{HC}$ per differenza di segmenti eguali, e $\overline{HC}$ è la proiezione dell'altro cateto sull'ipotenusa.
Si conferma: AHNP≡FGLM. C.v.d.

Teorema inverso del secondo teorema di Euclide. Se in un triangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa al lato maggiore è equivalente al rettangolo che come dimensioni le parti in cui è stato diviso dall'altezza il lato maggiore, il triangolo è rettangolo e l'angolo retto è all'opposto del lato maggiore.

ESERCIZI NONA LEZIONE

1) E' dato un semicerchio di diametro AB e centro O. Si congiunga un punto qualunque C dell'arco AB con il punto medio M della semicirconferenza e si conduca la perpendicolare per C ad AB che incontri in d la semicirconferenza. Dimostrare che: $CM^2+CD^2 \equiv 2AO^2$.

2) Dimostrare che sono equivalenti i quattro triangoli individuati dalle diagonali di un parallelogrammo.

3) Due circonferenze di raggi r e 3r sono tangenti esternamente. Condotta una retta tangente ad entrambe non passante per il punto di tangenza, dimostrare che il trapezio avente per vertici i punti di contatto e i centri delle due circonferenze è equivalente alla somma di un rettangolo avente per lati il segmento definito dai due punti di tangenza e il raggio r, e di un triangolo rettangolo (da definire sulla figura) avente un angolo eguale a ⅓ di angolo retto.

4) Dimostrare che dei quattro triangoli determinati dalle diagonali di un trapezio sono equivalenti quelli aventi per lati i lati obliqui del trapezio stesso.

5) Dimostrare che in un triangolo scaleno la differenza dei quadrati di due lati è equivalente alla differenza dei quadrati delle parti in cui resta diviso il terzo lato dall'altezza a esso relativa.

6) Sul punto medio M del lato AB di un triangolo equilatero ABC, si conduca la perpendicolare MP al lato BC. Dimostrare che: $MP \equiv 3(\frac{AB}{4})^2$.

7) Dimostrare che il quadrato costruito su di un lato di un triangolo equilatero è equivalente al triplo del quadrato avente per lato il raggio del cerchio circoscritto al triangolo dato.

8) In un cerchio si conducano le tangenti negli estremi A e B di un diametro e la tangente in un punto E qualunque di una delle semicirconferenze determinate da A e B, che incontri le precedenti nei punti C e D. Dimostrare che il rettangolo avente per lati CE e DE è equivalente al quadrato avente per lato il raggio OE.

9) Dato un quadrante AOB di una circonferenza, da un punto qualsiasi C dell'arco AB condurre la perpendicolare CD al raggio OA. Detto E il punto d'intersezione di CD con la bisettrice dell'angolo AOB, dimostrare che $CD^2+DE^2 \equiv AO^2$.

10) Per il vertice della base minore CB di un trapezio ABCD si conduca la parallela alla diagonale BD fino a incontrare in E il prolungamento della base maggiore. Dimostrare che il triangolo ACE è equivalente al trapezio dato.