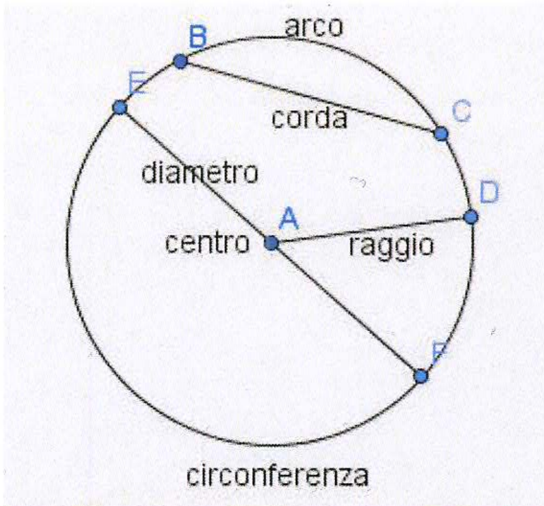
CIRCONFERENZA E CERCHIO

Definizioni

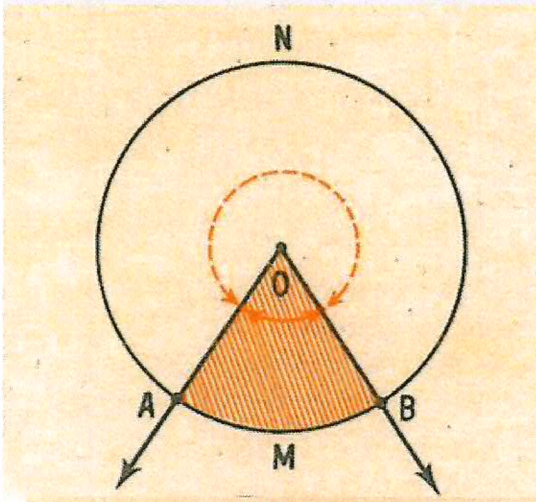
- La **circonferenza** è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto **centro.**



Il **raggio** è la distanza costante fra il centro e la circonferenza.

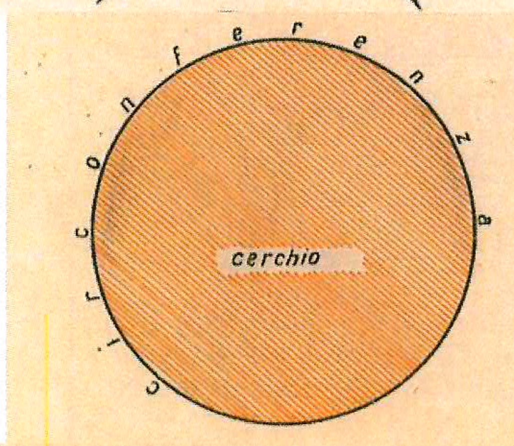
La **corda** è i segmento che congiunge due punti della circonferenza e sottende un arco, così come l'arco sottende la sua corda.

Il **diametro** è una corda che passa per il centro.

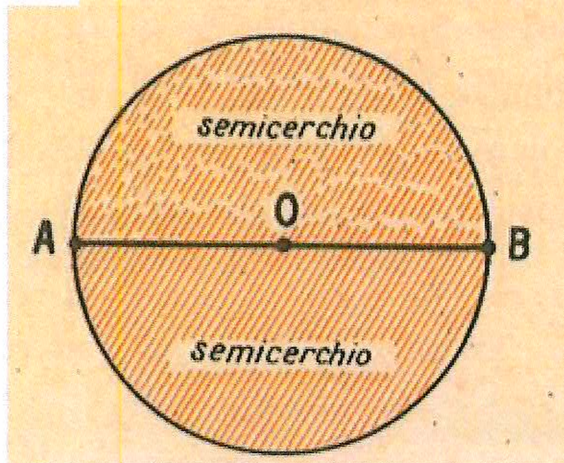


L'**arco di circonferenza** è l'una e l'altra parte in cui è divisa una circonferenza da due dei suoi punti (=origini o termini o estremi degli archi). L'arco di circonferenza si legge con tre lettere, due poste negli estremi e l'altra in un suo punto qualsiasi.

L'**angolo al centro** ha il vertice al centro di una circonferenza, e per lati le semirette che dal centro passano per gli estremi di un arco. La coppia di semirette però non determinano solo un angolo ma due angoli al centro, uno **convesso (AMB)** e l'altro **concavo (ANB)**.

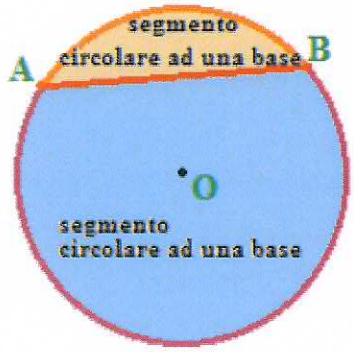


Il **cerchio** (o **circolo**) è il luogo geometrico determinato dai punti del piano interni a una circonferenza e da quelli della circonferenza stessa.

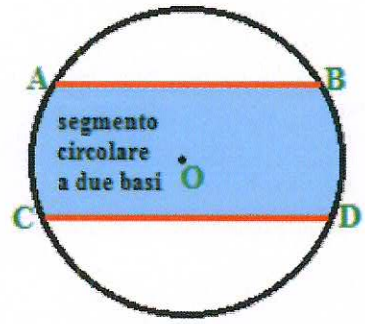


Il **semicerchio** è una delle due parti eguali in cui il diametro di una circonferenza divide il cerchio.

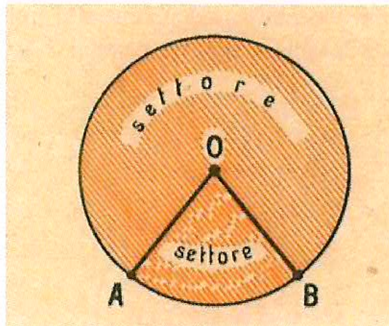
Il **segmento circolare a una base o monobasico** è la porzione di cerchio limitata da un arco e dalla corda da esso sottesa.



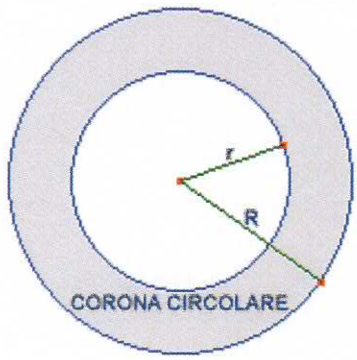
Il **segmento circolare a due basi o bibasico** è la porzione di cerchio limitata da due corde parallele.



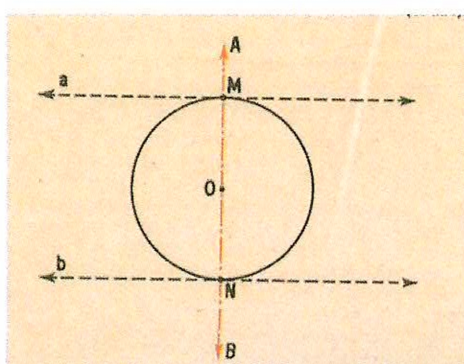
Il **settore circolare** è la porzione di cerchio compresa tra due raggi e un arco sia esso convesso che concavo.



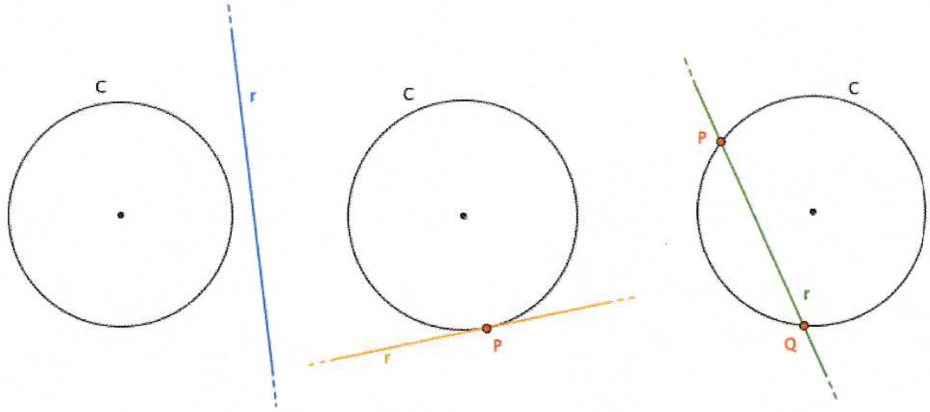
La corona circolare è la porzione di cerchio compresa fra due circonferenze con lo stesso raggio.



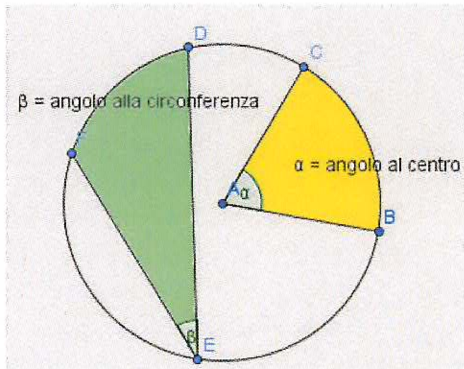
Sono "retta diametrale" tutte le rette che passano per il centro di una circonferenza.



1) Una retta si dice **esterna a una circonferenza** se tutti i suoi punti sono esterni alla circonferenza.
2) Una retta si dice **tangente a una circonferenza** se ha un solo punto in comune con la circonferenza.
3) Una retta si dice **secante a una circonferenza** se ha due punti in comune con la circonferenza.



Retta esterna alla circonferenza   Retta tangente alla circonferenza   Retta secante la circonferenza

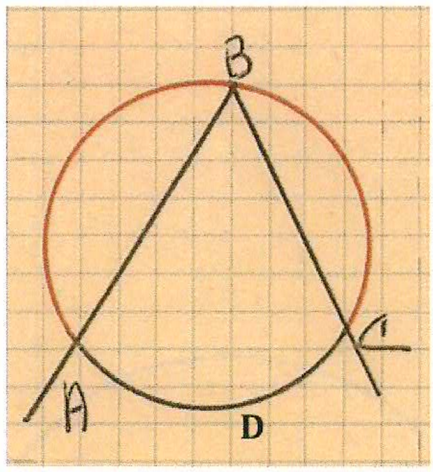


Angolo alla circonferenza è quell'angolo che ha il vertice in un punto della circonferenza e i lati entrambi secanti la circonferenza, o uno secante e l'altro tangente.

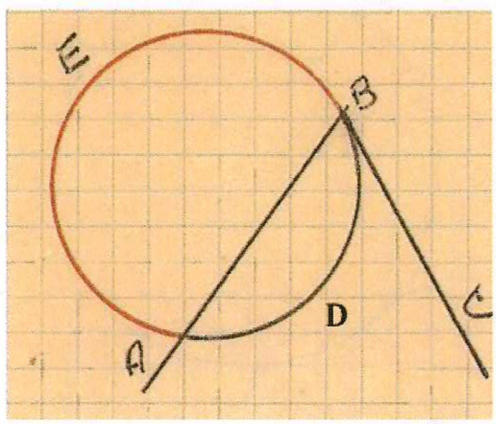
Angolo al centro è l'angolo che ha il vertice nel centro della circonferenza e i lati entrambi secano la circonferenza.

ATTENZIONE AI TERMINI:

Nelle figure riportate a lato, la **parte rossa** della circonferenza è quella che inscrive l'angolo, la **parte nera** è quella su cui l'angolo insiste.

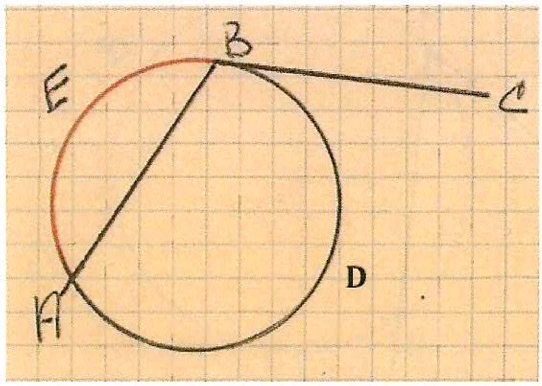


- Un angolo alla circonferenza è **inscritto nell'arco** che contiene il vertice ($\overset{\frown}{ABC}$) e ha come estremi i punti d'intersezione dei lati con la circonferenza. **Insiste sull'arco** opposto ($\overset{\frown}{ADC}$) che ha come estremi i punti di intersezione dei lati con la circonferenza e non contiene il vertice.

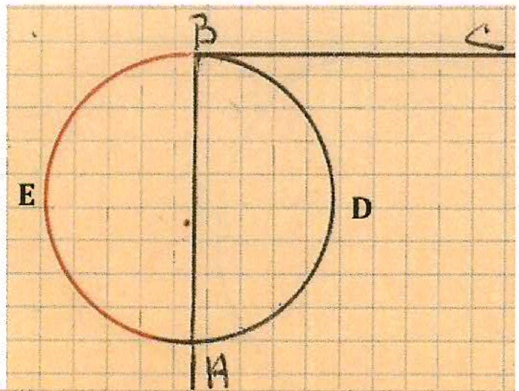


- Un angolo alla circonferenza con un lato tangente, se è acuto è **iscritto nell'arco concavo** ($\overset{\frown}{AEB}$) che ha per estremi il vertice e il punto d'incontro del lato secante con la circonferenza. **Insiste sull'arco** opposto convesso ($\overset{\frown}{ADB}$) che ha come estremi i punti di intersezione dei lati con la circonferenza.

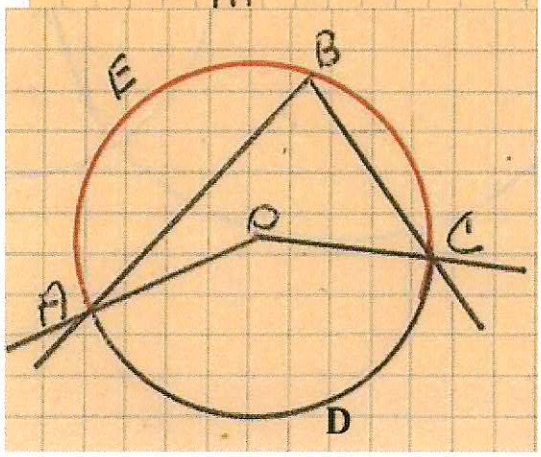
- Un angolo alla circonferenza con un lato tangente, se è ottuso è **iscritto nell'arco convesso** ($\overset{\frown}{AEB}$) che ha per estremi il vertice e il punto d'incontro del lato secante con la circonferenza. **Insiste sull'arco** opposto **concavo** ($\overset{\frown}{ADB}$) che ha come estremi i punti di intersezione dei lati con la circonferenza.



- Un angolo alla circonferenza con un lato tangente, se è retto è **iscritto nella semicirconferenza** non contenuta nell'angolo ($\overset{\frown}{AEB}$) che ha come estremi i punti di intersezione dei lati con la circonferenza. **Insiste sulla semicirconferenza** contenuta nell'angolo ($\overset{\frown}{ADB}$) che ha come estremi i punti di intersezione dei lati con la circonferenza.

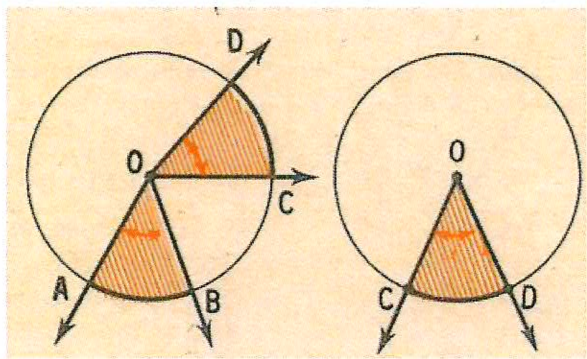


- Sono **corrispondenti** gli angoli alla circonferenza ($\overset{\frown}{ABC}$) e gli angoli al centro (AOC) che insistono sullo stesso arco ($\overset{\frown}{ADC}$).

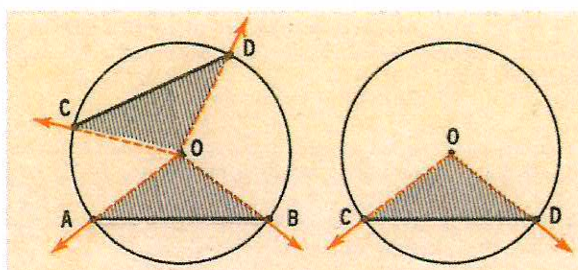


Teorema 1. In una medesima circonferenza o in circonferenze eguali, angoli al centro eguali insistono su archi eguali e viceversa.

La dimostrazione si risolve con il metodo della **sovrapposizione**.



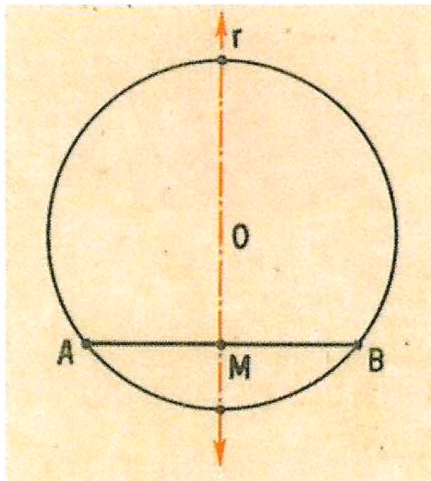
Teorema 2. In una medesima circonferenza o in circonferenze eguali, corde eguali sottendono archi eguali e viceversa.



Unendo il centro della circonferenza con gli estremi delle corde, otteniamo triangoli eguali per il terzo criterio d'eguaglianza dei triangoli. Perciò anche gli angoli al centro sono eguali e insistono su archi eguali per il teorema precedente. Così l'inverso.

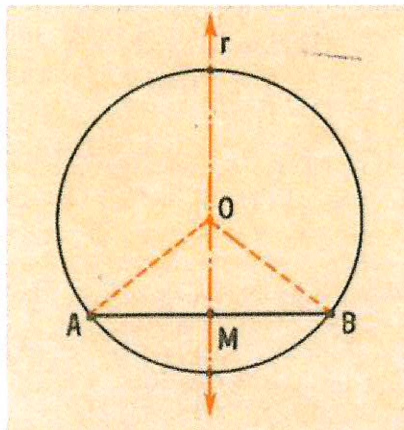
Teorema 3. L'asse di una corda di una circonferenza passa per il centro della circonferenza stessa.

Poiché da una parte l'asse di un segmento che qui è la corda AB, è il luogo geometrico del piano dei punti equidistanti dagli estremi del segmento A e B, dall'altra, la circonferenza è il luogo geometrico dei punti equidistanti dal suo centro, tali anche A e B, il centro deve appartenere all'asse di $\overset{\frown}{AB}$.



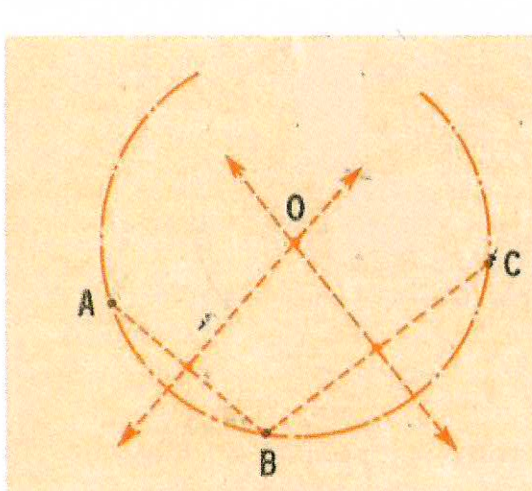
Teorema 4. La retta passante per il centro e per il punto medio di una corda è perpendicolare alla corda.

Unendo O con A e O con B (due raggi), consideriamo i triangoli AOM e BOM che sono eguali per il terzo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MB}$; $\overset{\frown}{OM}$ in comune; $\overset{\frown}{OA}=\overset{\frown}{OB}$ raggi. In particolare sono eguali gli angoli OMA e OMB supplementari e perciò retti.

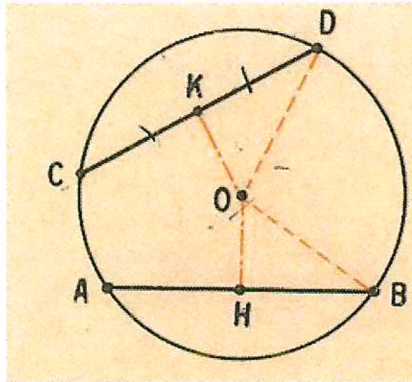


Teorema 5. Per tre punti non in linea retta passa una e una sola circonferenza.

- Siano A, B e C i punti assegnati.
- Si congiunga A con B e B con C.
- Si traccino gli assi di $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{BC}$ che s'intersecano in O.
- O è comune ai due assi, perciò equidistante dagli estremi dei segmenti AB e AC, i punti suddetti.
- Anche la circonferenza però è il luogo geometrico dei punti equidistanti dal centro.
- O quindi è anche il centro della circonferenza su cui si trovano i suddetti punti.
- Non vi è altra circonferenza passante per A, B, C perché gli assi dei due segmenti possono incontrarsi solo in un punto.



Teorema 5. Nello stesso cerchio o in cerchi eguali, corde eguali hanno eguale distanza dal centro e viceversa.



A) Ipotesi: $\overline{CD}=\overline{AB}$ **Tesi:** $\overline{KO}=\overline{HO}$

Dimostrazione:

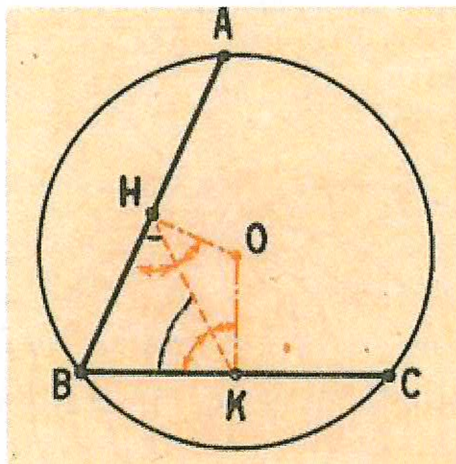
- Si ricordi che gli assi di una corda passano per il centro di una circonferenza.
- Dopo aver tracciato le distanze delle corde dal centro della circonferenza, $\overline{OK}$ e $\overline{OH}$; e aver unito O con D e O con B, si considerino i triangoli KOD e HOB eguali per il quarto criterio d'uguaglianza dei triangoli rettangoli: $\overline{OD}=\overline{OB}$ perché raggi; $\overline{KD}=\overline{HB}$ perché metà di segmenti eguali; $\widehat{H}=\widehat{K}=90°$.
- In particolare $\overline{KO}=\overline{HO}$. C.v.d.

B) Ipotesi: $\overline{KO}=\overline{HO}$ **Tesi:** $\overline{AB}=\overline{CD}$

Si ripeta la stessa costruzione e si considerino gli stessi triangoli che sono ancora eguali per avere non più eguale il cateto maggiore ma il minore $\overline{KO}=\overline{HO}$. La conseguenza è che $\overline{KD}=\overline{HB}$ entrambe metà della corda perché l'asse cade nel punto medio di un segmento. Dunque $\overline{CD}=\overline{AB}$

C.v.d.

Teorema 6. Nello stesso cerchio o in cerchi eguali, corde diseguali hanno diseguale distanza dal centro: la maggiore ha una distanza minore e la minore una distanza maggiore e viceversa.



A) Ipotesi: $\overline{AB}>\overline{BC}$ **Tesi:** $\overline{HO}<\overline{KO}$

Dimostrazione:

- Si uniscano i punti medi delle corde H e K e si consideri il triangolo BHK, dove $\overline{BH}>\overline{BK}$ per ipotesi.
- Per il teorema che dice che, se in un triangolo due lati sono disuguali, al lato maggiore si oppone angolo maggiore e al minore angolo minore, $\widehat{BKH}>\widehat{BHK}$.
- I rispettivi complementari dei suddetti angoli sono $\widehat{OKH}$ e $\widehat{OHK}$ tali per cui $\widehat{OKH}<\widehat{OHK}$.
- P~~p~~er il teorema inverso del precedente, ad angolo minore $\widehat{OKH}$ si oppone lato minore, $\overline{HO}$, ad angolo maggiore $\widehat{KHO}$, lato maggiore, $\overline{OK}$. Perciò $\overline{HO}<\overline{KO}$. C.v.d.

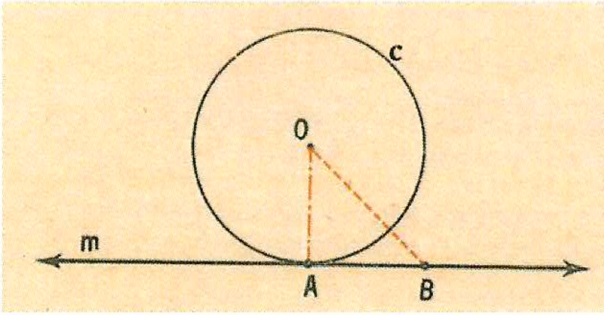
B) Ipotesi: $\overline{HO}<\overline{KO}$ **Tesi:** $\overline{AB}>\overline{BC}$

Dimostrazione: Si parta dal triangolo HOK e a ritroso si percorra la stessa strada.

Postulato 1. Un segmento o un arco che congiunge un punto interno con uno esterno a una circonferenza ha con questa un solo punto in comune.

Postulato 2. Una retta non può avere più di due punti in comune con una circonferenza

Teorema 7. Se una retta ha la **distanza dal centro** di una circonferenza minore, eguale, maggiore della misura del raggio, sarà rispettivamente interna, tangente, esterna alla circonferenza stessa.



Dimostriamo solo il secondo caso.

Ipotesi: $\overline{OA}$ (distanza dal centro) = r

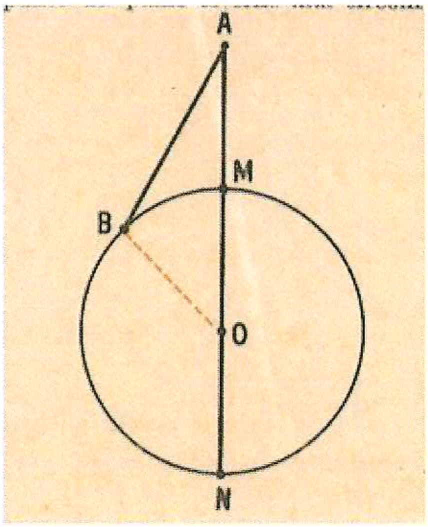
Tesi: m tangente c

Dimostrazione:

- Si prenda un punto qualsiasi su m, B, e lo si unisca a O.
- Si consideri il triangolo AOB retto in A perché $\overline{OA}$ distanza di O da m.
- $\overline{OB}$, ipotenusa, è più lungo di $\overline{OA}$=r.
- Le distanze da tutti i punti della retta m sono dunque più lunghe del raggio e quindi i punti sono tutti esterni a c, tranne A unico punto in cui m è tangente di c. C.v.d.

Corollario: una retta tangente a una circonferenza è perpendicolare al raggio che ha un estremo nel punto di contatto.

Teorema 8. Fra tutti i segmenti che uniscono il punto del piano diverso dal centro con i punti di una circonferenza , il minore e il segmento che giace sulla retta diametrale e ha come estremi il punto suddetto e il primo punto d'intersezione con la circonferenza; e il maggiore, il secondo punto d'intersezione con la circonferenza.



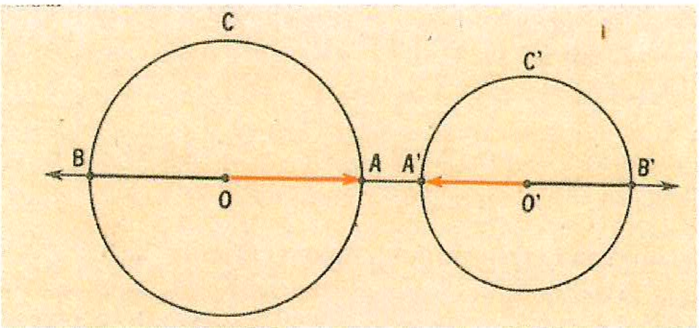
Ipotesi: $\overline{AN} \rightarrow$ retta diametrale

Tesi: $\overline{AM}<\overline{AB}$; $\overline{AN}>\overline{AB}$

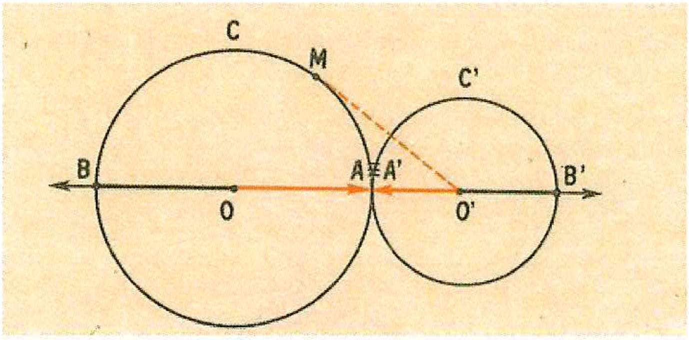
Dimostrazione:

- Si congiunga B con O e si ricordino i due teoremi che dicono che un lato di un triangolo è sempre inferiore alla somma degli altri due; e che è sempre maggiore della differnza degli altri due.
- $\overline{AB} > \overline{OA}-\overline{OB}$. Ma $\overline{OB}=\overline{OM}$. Perciò sostituendo: $\overline{AB}>\overline{OA}-\overline{OM}$; $\overline{AB}>\overline{AM}$; $\overline{AM}<\overline{AB}$.
- $\overline{AB}<\overline{BO}+\overline{AO}$. Ma $\overline{BO}=\overline{ON}$. Perciò sostituendo: $\overline{AB}<\overline{ON}+\overline{AO}$; $\overline{AB}<\overline{AN}$; $\overline{AN}>\overline{AB}$. C.v.d.

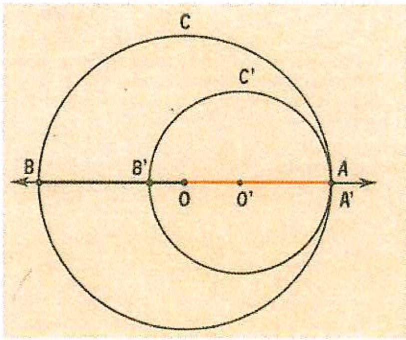
Teorema 9: Se la distanza fra i centri di due circonferenze è maggiore della somma dei raggi le due circonferenze sono esterne (ogni punto dell'una è estreno all'altra).



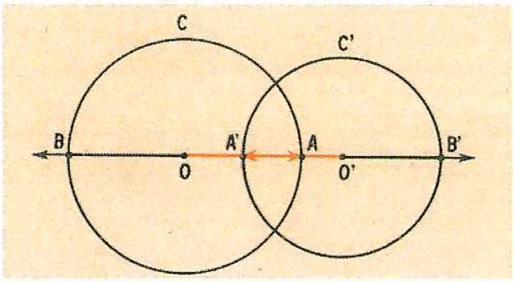
Teorema 10. Se la distanza fra i centri di due circonferenze è eguale alla somma dei raggi, le due circonferenze sono tangenti esternamente (hanno solo un punto in comune e tutti gli altri punti dell'una sono esterni ai punti dell'altra).



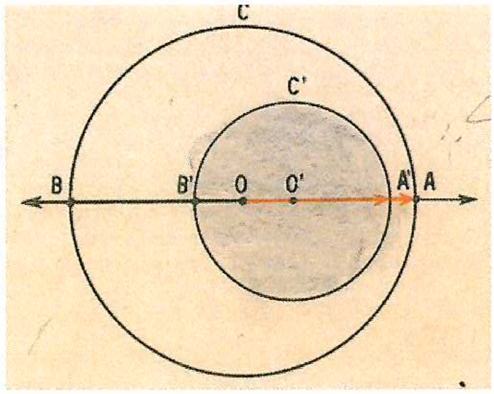
Teorema 11. Se la distanza fra i centri di due circonferenze è eguale alla differenza dei raggi, le due circonferenze sono tangenti internamente (hanno solo un punto in comune e tutti gli altri punti dell'una sono interi ai punti dell'altra).



Teorema 12. Se la distanza fra i centri di due circonferenze è minore della somma dei raggi e maggiore della loro differenza, le due circonferenze sono secanti (hanno due punti comuni).

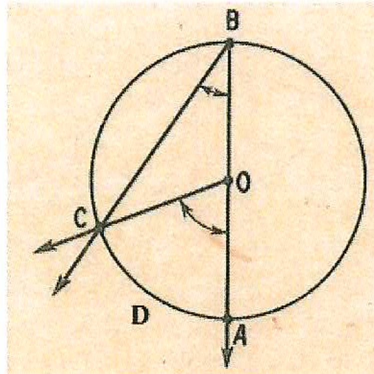


Teorema 13. Se la distanza fra i centri di due circonferenze è minore della differenza dei raggi, le due circonferenze sono una interna all'altra (tutti i punti dell'una sono dentro all'altra).



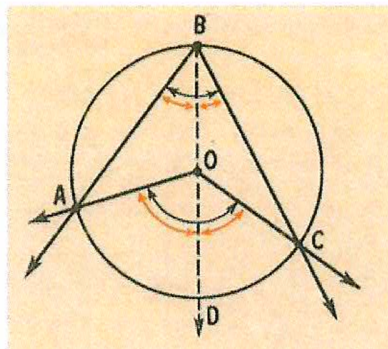
Teorema 14. L'angolo al centro è il doppio dell'angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco.

A) <u>I lati dell'angolo alla circonferenza sono entrambi secanti e il centro appartiene a uno dei lati.</u>



- Si consideri il triangolo BCO: l'angolo esterno COA è eguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti: $\widehat{COA}=\widehat{BCO}+\widehat{CBO}$.
- $\widehat{BCO}$ e $\widehat{CBO}$ sono però due angoli eguali perché alla base del triangolo isoscele BCO ($\overline{CO}=\overline{BO}$ perché raggi).
- Dunque $\widehat{COA}=2\widehat{CBO}$. C.v.d.

B) <u>I lati dell'angolo alla circonferenza sono entrambi secanti e il centro è interno ad esso.</u>

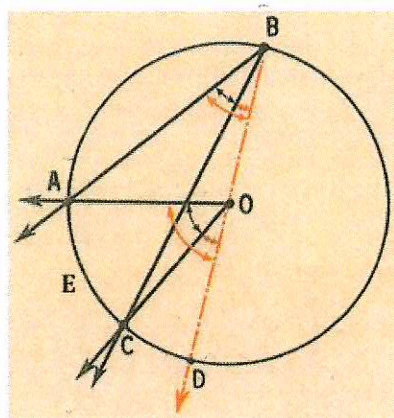


- Si tracci da B la semiretta diametrale che divide l'angolo alla circonferenza e l'angolo al centro in quattro angoli che insistono rispettivamente sull'arco AD e sull'arco DC.
- Si possono valutare separatamente $\widehat{ABD}$ e $\widehat{AOD}$; $\widehat{DBC}$ e $\widehat{DOC}$ secondo la dimostrazione precedente (A), per poi **sommare** i risultati:

$\widehat{AOD}+\widehat{DOC} = 2\widehat{ABD}+ 2\widehat{DBC}$.

$\widehat{AOC}=2\widehat{ABC}$ C.v.d.

C) <u>I lati dell'angolo alla circonferenza sono entrambi secanti e il centro è esterno a esso.</u>

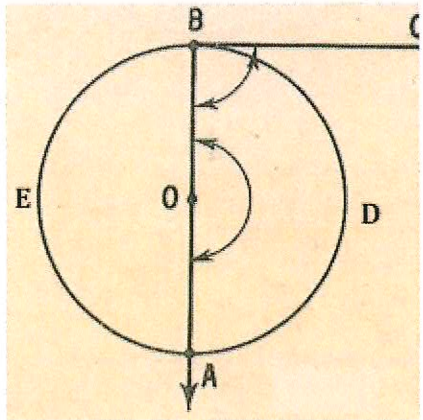


- Si tracci da B la semiretta diametrale che aggiunge un angolo alla circonferenza e un angolo al centro agli angoli dati.
- Si possono valutare separatamente $\widehat{ABD}$ e $\widehat{AOD}$; $\widehat{DBC}$ e $\widehat{DOC}$ secondo la dimostrazione precedebte (A), per poi **sottrarre** i risultati:

$\widehat{AOD}-\widehat{COD} = 2\widehat{ABD}- 2\widehat{CBD}$.

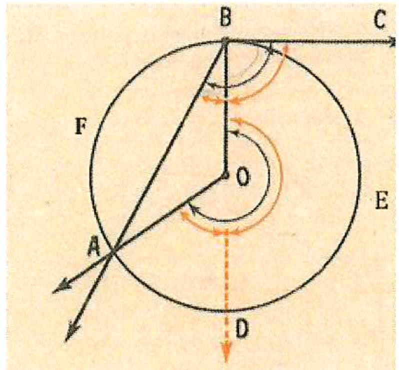
$\widehat{AOC}=2\widehat{ABC}$ C.v.d.

D) <u>Un lato dell'angolo alla circonferenza è tangente, l'altro è secante e il centro appartiene a questo lato.</u>



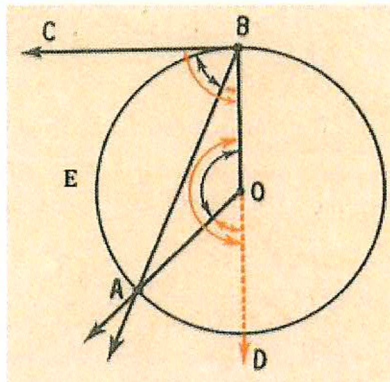
- Poiché il raggio è sempre perpendicolare alla tangente nel punto di contatto con la circonferenza, $\widehat{ABC}=90°$.
- Ma l'angolo al centro, appartenendo alla retta diametrale, è piatto = 180°. C.v.d.

E) <u>Un lato dell'angolo alla circonferenza è tangente e l'altro è secante e il centro è interno all'angolo.</u>



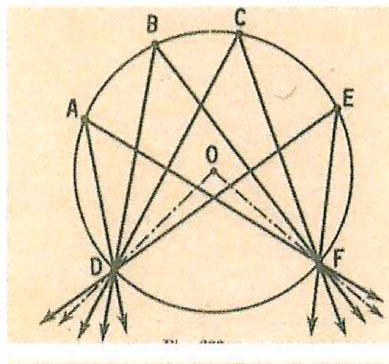
Attenzione che l'angolo al centro AOB è concavo.
Prolungando $\overline{BO}$ in $\overline{BD}$ sulla retta diametrale, si scompone l'angolo ABC in $\widehat{ABD}$ e $\widehat{DBC}$ su cui si applicano le dimostrazioni precedenti **A** e **D** per poi sommare i risultati ottenuti. C.v.d

F) <u>Un lato dell'angolo alla circonferenza è tangente, l'altro è secante e il centro è esterno all'angolo.</u>



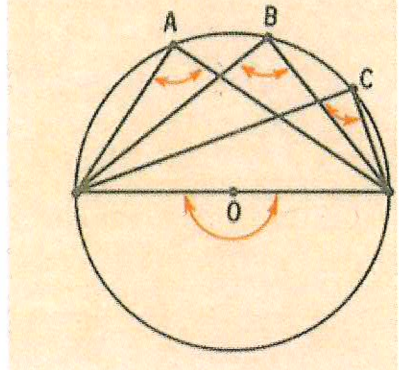
Prolungando $\overline{BO}$ in $\overline{BD}$ sulla retta diametrale, si ottiene l'angolo CBD e l'angolo ABD, su cui si applicano le dimostrazioni precedenti **A** e **D** per poi sottrarre a CBD, ABD per poi sottrarre i risultati ottenuti. C.v.d.

Corollario 1: Tutti gli angoli alla circonferenza che insistono su di uno stesso arco, sono eguali.



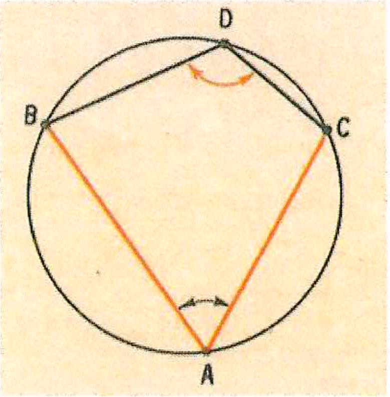
Perché sono la metà dello stesso angolo al centro (in questo caso DOF)

Corollario 2: Tutti gli angoli alla circonferenza che insistono su una semicirconferenza sono retti.



Infatti, se un angolo insiste su una semicirconferenza vuol dire che i suoi lati passano per gli estremi di un diametro il cui angolo al centro è di 180°.

Corollario 3: Se un angolo è iscritto in un arco maggiore di una semicirconferenza è acuto; se è inscritto in un arco minore di una semicirconferenza è ottuso.



ESERCIZI

1) Dimostrare che l'angolo formato dalle tangenti a una circonferenza condotte da un piano esterno è supplementare dell'angolo al centro i cui lati passano per i punti di contatto.
2) Condotta la tangente r in un punto T di una circonferenza di centro O, siano A e B due punti della tangente equidistanti da T. Dimostrare che il triangolo AOB è isoscele
3) E' dato un cerchio di diametro AB. Dal punto P della retta AB, esterno al cerchio, si conduca una tangente PT alla circonferenza e sia H la proiezione del punto T di tangenza su AB. Dimostrare che TA e TB sono le bisettrici degli angoli formati dalle rette TP e TH.
4) Se M e N sono i punti medi di due archi AB e AC di una circonferenza e la corda MN taglia le corde AB in D e AC in E, dimostrare che AD=AE.
5) Due circonferenze T e T' di centro O e O' sono eguali. Una retta secante parallela a OO' taglia la prima di esse nei punti A e B e l'altra nei punti C e D. Dimostrare che OO'CA e OO'DB sono parallelogrammi.
) Se per gli estremi di due archi e guali e consecutivi AB e BC di una circonferenza si conducono quattro semirette AE, BE, BF, CF passanti per gli estremi di un altro arco EF (si assegnino le lettere A, B, C, E, F in giusta successione lungo la circonferenza) della circonferenza stessa e che s'incontrino dalla parte di A e B nei punti P e Q, gli angoli AQB e BPC sono eguali.
7) Se da un punto A esterno a una circonferenza si conducono due secanti s e s' che incontrano la circonferenza rispettivamente nei punti B, C, D ,E dimostrare che i triangopli ABE e ADC hanno gli angoli rispettivamente eguali.
8) Dimostrare che se si conduce una corda di una circonferenza che taglia un diametro in un punto diverso dal centro, la parte del diametro che contiene il centro è maggiore, e quella che non lo contiene è minore di ciascuna delle parti in cui è rimasta divisa la corda.
9) Se A'B' è la proiezione di un diametro AB sopra una retta secante e parallela al diametro che tagli una circonferenza in C e D, dimostrare che A'C=B'D.
10) Date due circonferenze tangenti internamente, dimostrare che tra tutte le corde tangenti alla circonferenza interna, la maggiore è quella parallela alla retta tangente alle due circonferenze nel punto di contatto.