

PUNTI NOTEVOLI DI UN TRIANGOLO

Definizione

Una figura geometrica si dice luogo geometrico se tutti i suoi punti e solo essi godono di una certa proprietà. Un luogo geometrico può essere l'asse di un segmento o la bisettrice di un angolo.

Teorema 1. L'asse di un segmento è il luogo geometrico e il solo luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dagli estremi del segmento.

Ipotesi:

$$r \perp \overline{AB} \quad (1)$$

$$\overline{AM} = \overline{MB} \quad (2)$$

Tesi:

1) $\overline{PA} = \overline{PB}$ (tutti i punti di r sono equidistanti da A e da B)

2) $\overline{AQ} \neq \overline{QB}$

Dimostrazione

1)

- Si unisca P ad A e a B. $\widehat{PMA} = \widehat{PMB}$ per il primo criterio d'uguaglianza dei triangoli: PM in comune; $\overline{AM} = \overline{MB}$ per la (2); $\widehat{PMA} = \widehat{PMB}$ per la (1).

- Anche $\overline{PA} = \overline{PB}$, e questa dimostrazione si può ripetere per tutti gli altri punti di r .

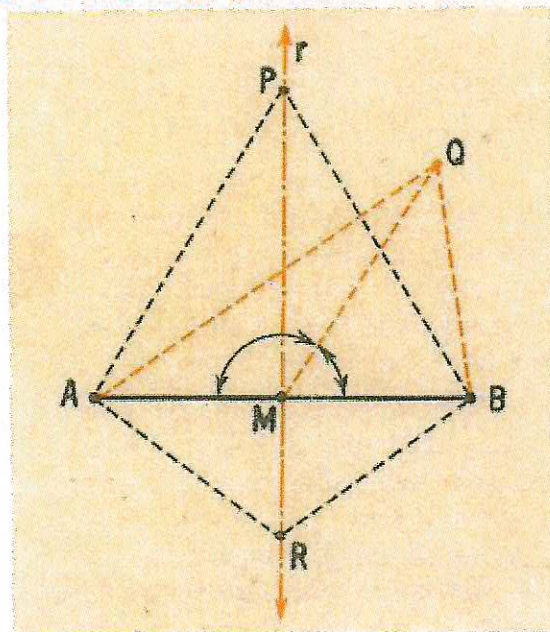
2)

- Se M fosse su $\overline{AB}$ non dividerebbe $\overline{AB}$ in due parti eguali poiché non appartiene a r ; se invece non appartiene ad $\overline{AB}$ si trova dentro a uno dei quattro angoli determinati da r tagliata da $\overline{AB}$.

- Si unisca Q (che non appartiene alla retta r) con A e con B e si considerino i due angoli QMA e QMB che non possono essere eguali ma uno sarà ottuso e l'altro acuto.

- I due triangoli QMA e QMB hanno un lato in comune, un altro definito rispettivamente dai segmenti eguali $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$, ma gli angoli compresi differenti.

- Per il teorema che sostiene che, se due lati di un triangolo sono rispettivamente eguali ai lati di un altro triangolo, e l'angolo compreso è uno maggiore dell'altro, allora ad angolo maggiore si contrappone lato maggiore, ad angolo minore, lato minore. Anche $\overline{QA} > \overline{QB}$. C.v.d.



Teorema 2. La bisettrice di un angolo è il luogo geometrico e il solo luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dai lati dell'angolo.

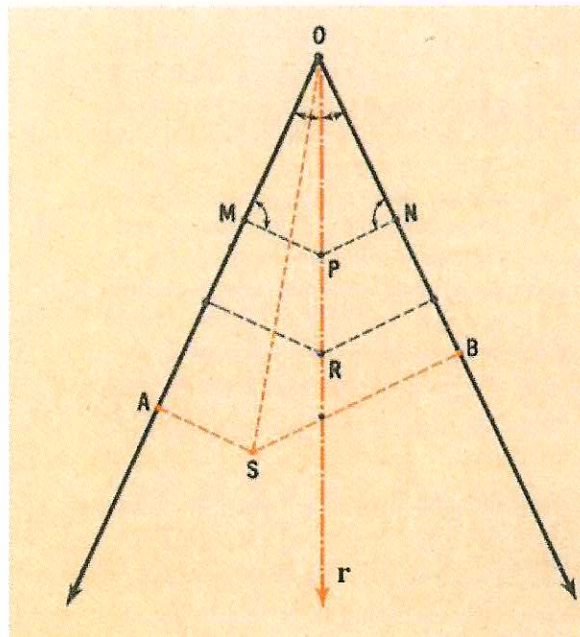
Ipotesi: $\widehat{AOR} = \widehat{ROB}$ (1)

Tesi: A) $\overline{PM} = \overline{PN}$
B) $\overline{AS} \neq \overline{SB}$

Dimostrazione:

A) $\widehat{OMP} = \widehat{OPN}$ per il secondo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\overline{OP}$ in comune; $\widehat{M} = \widehat{N} = 90^\circ$; $\widehat{MOP} = \widehat{NOP}$ per la (1). In particolare $\overline{NP} = \overline{MP}$, e questa dimostrazione si può ripetere per tutti gli altri punti di r .

B) Si consideri **per assurdo** che S sia un punto equidistante dai lati dell'angolo AOB , allora $\overline{AS} = \overline{SB}$, i triangoli $ASO = OSB$ sarebbero eguali per le stesse ragioni della dimostrazione precedente. Se ne concluderebbe che $\widehat{AOS} = \widehat{AOR}$. $\widehat{AOS}$ però, pur avendo un lato comune, ha l'altro interno ad $\widehat{AOR}$ e l'eguaglianza risulta un assurdo, confermando la validità della tesi. C.v.d.



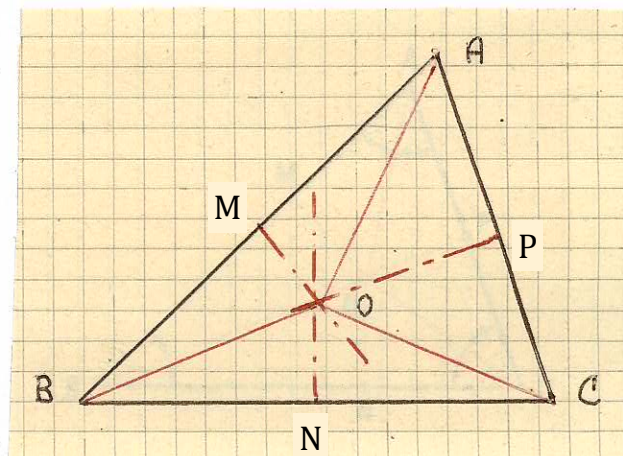
Teorema 3: Gli assi dei lati di un triangolo passano per lo stesso punto che si chiama **circocentro**.

Ipotesi: $\overline{MO}$ asse di $\overline{AB}$ (1)
 $\overline{NO}$ asse di $\overline{BC}$ (2)
 $\overline{PO}$ asse di $\overline{AC}$ (3)

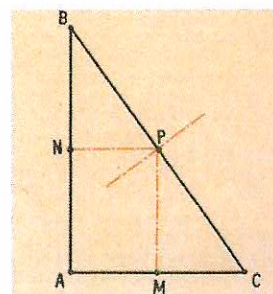
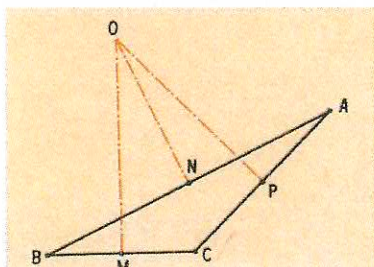
Tesi: O, punto d'incontro dei tre assi

Dimostrazione:

- Gli assi $\overline{ON}$ e $\overline{OP}$ s'incontrano necessariamente in un punto O, perché perpendicolari a rette non parallele.
- Per la proprietà dell'asse di un segmento, $\overline{BO} = \overline{OC}$.
- Anche $\overline{OC} = \overline{OA}$ in riferimento all'asse $\overline{OP}$ del lato $\overline{AC}$.
- Se si considerano le due eguaglianze, per la proprietà transitiva anche $\overline{BO} = \overline{OA}$.
- Solo i punti che appartengono all'asse del lato $\overline{BA}$ sono equidistanti da A e da B, perciò da O passa anche l'asse del lato $\overline{AB}$ che s'incontra con gli altri due nel circocentro. C.v.d.



Considerazioni: si ricordi che il circocentro in un triangolo ottusangolo cade fuori dal triangolo; nel triangolo rettangolo cade nel punto medio dell'ipotenusa.



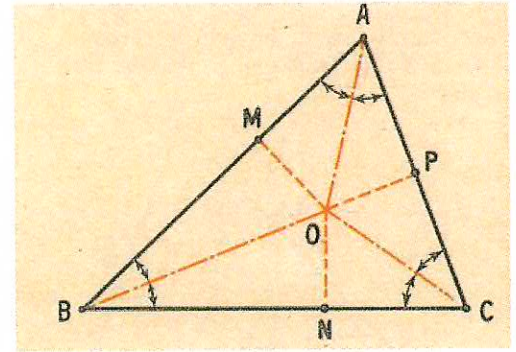
Teorema 4. Le bisettrici degli angoli di un triangolo passano per uno stesso punto che si chiama **incentro**.

Ipotesi:

- $\overline{BO}$ bisettrice di $\widehat{ABC}$ (1)
- $\overline{CO}$ bisettrice di $\widehat{ACB}$ (2)
- $\overline{AO}$ bisettrice di $\widehat{BAC}$ (3)

Tesi: O, punto d'incontro delle tre bisettrici.

Dimostrazione:



- Le due bisettrici BO e CO s'incontrano necessariamente in un punto non potendo essere parallele perché in un triangolo gli angoli sono tutti inferiori a 180° (solo due angoli di 180° potrebbero avere due bisettrici parallele)
 - Per la (1) $\overline{MO} = \overline{NO}$, distanze di BO da $\overline{BC}$ e $\overline{BA}$.
 - Per la (2) $\overline{NO} = \overline{PO}$ distanze di CO da $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$.
 - Se si considerano le due eguaglianze, per la proprietà transitiva anche $\overline{MO} = \overline{PO}$
 - Solo i punti che appartengono alla bisettrice dell'angolo BAC sono equidistanti da $\overline{AB}$ e da $\overline{AC}$, perciò da O passa anche la bisettrice dell'angolo BAC che s'incontra con le altre due nell'incentro.
- C.v.d.

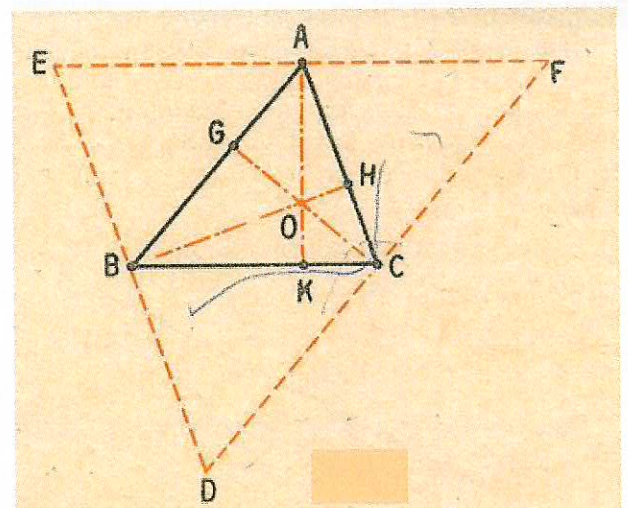
Teorema 5. Le tre altezze di un triangolo passano per uno stesso punto che si chiama **ortocentro**.

Ipotesi:

- $\overline{BH}$ altezza relativa a $\overline{AC}$ (1)
- $\overline{CG}$ altezza relativa a $\overline{AB}$ (2)
- $\overline{AK}$ altezza relativa a $\overline{BC}$ (3)

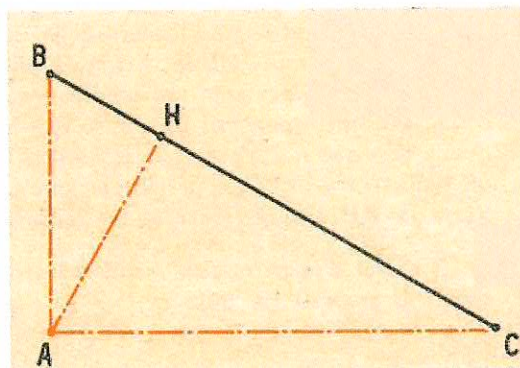
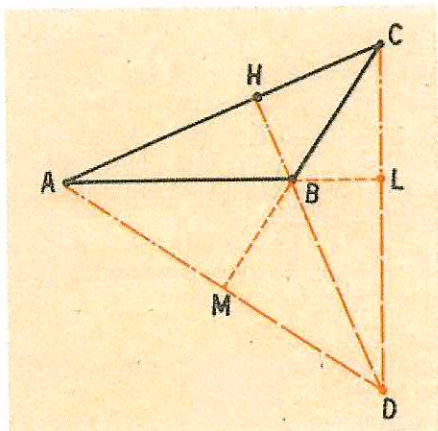
Tesi: O, punto d'incontro delle tre altezze.

Dimostrazione:



- Si traccino le parallele ai tre lati del triangolo per i vertici degli angoli a loro opposti e si consideri dalle loro intersezioni il triangolo ottenuto EFD.
 - I vertici del triangolo iniziale cadono al centro dei lati del nuovo triangolo costruito, dividendo i lati in due parti eguali, ad esempio $\overline{EA} = \overline{AF}$.
 - BEAC, infatti, è un parallelogramma avendo i lati opposti paralleli per costruzione; e anche BAFC. Così che $\overline{BC} = \overline{EA}$ e $\overline{BC} = \overline{AF}$, che per la proprietà transitiva danno $\overline{EA} = \overline{AF}$.
 - Così $\overline{AK}$, $\overline{BH}$, $\overline{CG}$, oltre a essere le altezze di $\triangle ABC$ sono anche gli assi dei lati del triangolo costruito che per la dimostrazione precedente s'incontrano in un punto, il circocentro.
 - Circocentro per EFD ma ortocentro per il triangolo ABC.
- C.v.d.

Considerazioni: si ricordi che l'ortocentro in un triangolo ottusangolo cade fuori dal triangolo; nel triangolo rettangolo cade nel vertice dell'angolo retto.



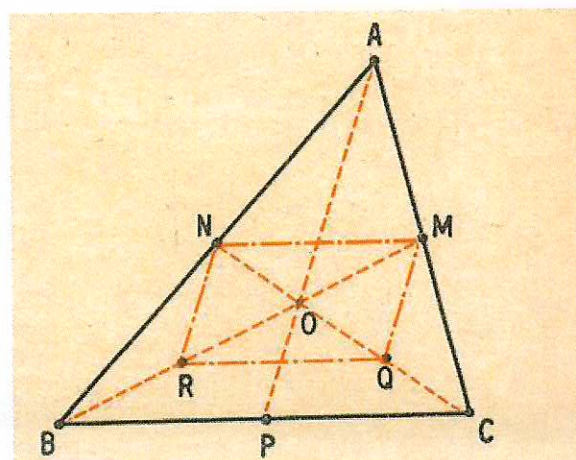
Teorema 6. Le tre mediane di un triangolo passano per lo stesso punto che si chiama **baricentro**.

Ipotesi:

- $\overline{BM}$ mediana relativa ad $\overline{AC}$ (1)
- $\overline{CN}$ mediana relativa ad $\overline{AB}$ (2)
- $\overline{AP}$ mediana relativa a $\overline{BC}$ (3)

Tesi: O, punto d'incontro delle mediane

Dimostrazione:



- Le mediane di un triangolo non possono essere parallele perché sono tracciate dentro ad un triangolo dove gli angoli sono acuti o al limite ce n'è uno retto o ottuso, quindi si devono incontrare in un punto O. Ad esempio, $\overline{BM}$ e $\overline{CN}$ s'incontrano in O.
- Si unisca M a N: $\overline{MN}$ è parallelo a $\overline{BC}$ per il teorema che dice che se si uniscono i punti medi dei lati di un triangolo, il segmento risultante è parallelo al terzo lato ed è metà di esso: $MN=BP=CP$.
- Se si considera poi il triangolo BOC e si individuano i punti medi di $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$, R e Q, per il teorema citato prima anche $\overline{RQ} // \overline{BC}$.
- Per la proprietà transitiva $MN=RQ$.
- RNMQ è dunque un parallelogrammo avendo i lati opposti eguali e paralleli e le diagonali si bisecano: $NO=OQ$. Ma $OQ=OC$ per costruzione.
- La mediana di un triangolo, incontrando l'altra mediana è divisa in due parti di cui la parte verso l'angolo è il doppio dell'altra verso il lato. E questo ragionamento vale per tutte e tre le mediane.
- Il punto d'incontro è dunque unico per $\overline{BM}$ e $\overline{CN}$ e, considerando $\overline{AP}$ e $\overline{BM}$, non potrà essere diverso e è il baricentro. C.v.d.

TEOREMA 1: Angoli supplementari (complementari, explementari) di angoli eguali, sono eguali.

TEOREMA 2: Le bisettrici di due angoli adiacenti (explementari) sono perpendicolari (adiacenti), formano cioè un angolo retto (piatto).

Teorema 3: Due angoli opposti al vertice sono eguali.

Teorema 4: Le bisettrici di due angoli opposti al vertice sono semirette opposte o adiacenti; inoltre le due rette determinate dalle bisettrici delle due coppie degli angoli opposti sono perpendicolari.

II Lezione

Primo criterio d'eguaglianza dei triangoli

Due triangoli sono eguali se hanno i due lati e l'angolo compreso dell'uno eguale ai due lati e all'angolo compreso dell'altro.

Secondo criterio d'eguaglianza dei triangoli

Due triangoli sono eguali se hanno eguale un lato e i due angoli a esso adiacenti.

Terzo criterio d'eguaglianza dei triangoli

Due triangoli sono eguali se i tre lati dell'uno sono rispettivamente eguali ai tre lati dell'altro

Teorema 1: in un triangolo isoscele gli angoli alla base sono eguali (gli angoli opposti ai lati eguali) e la bisettrice dell'angolo al vertice corrisponde all'altezza e alla mediana relative alla base.

Teorema 2: Un triangolo che ha due angoli eguali è isoscele

Teorema 3: Un triangolo che ha i tre angoli eguali ha anche tre lati eguali.

III Lezione

Teorema. Due rette di un piano sono parallele se, tagliate da una trasversale, formano coppie di angoli alterni interni eguali.

Corollario 1: Due rette di un piano sono parallele se, tagliate da una trasversale, formano coppie di angoli alterni esterni eguali.

Corollario 2: Due rette di un piano sono parallele se, tagliate da una trasversale, formano coppie di angoli corrispondenti eguali.

Corollario 3: Due rette di un piano sono parallele se, tagliate da una trasversale, formano coppie di angoli coniugati supplementari.

Teorema 3: Se due rette di un piano sono parallele esse, tagliate da una trasversale, formano coppie di angoli alterni interni eguali.

Corollario 1. Se due rette di un piano sono parallele esse, tagliate da una trasversale, formano coppie di angoli corrispondenti eguali.

Corollario 2. Se due rette di un piano sono parallele esse, tagliate da una trasversale, formano coppie di angoli coniugati supplementari.

Teorema 4. Se due rette sono perpendicolari, tutte le parallele a una di esse sono perpendicolari all'altra.

Teorema 5: In un piano se due rette s'incontrano, s'incontrano anche le loro perpendicolari.

Teorema. Due angoli con lati paralleli e concordi sono eguali

Corollario 1: Due angoli con i lati paralleli e discordi sono eguali

Corollario 2: Due angoli con due lati paralleli e concordi e gli altri due lati paralleli e discordi sono supplementari.

IV Lezione

Teorema 1. In un trapezio sono supplementari le coppie di angoli agli estremi dei lati non paralleli

Teorema 2. In un parallelogrammo gli angoli adiacenti a uno qualunque dei lati sono supplementari

Teorema 3. Un parallelogrammo è diviso da una sua diagonale in due triangoli eguali.

Teorema 4. I lati opposti di un parallelogrammo sono eguali

Teorema 5. Gli angoli opposti di un parallelogrammo sono eguali

Teorema 6. Le diagonali di un parallelogrammo si tagliano in segmenti eguali.

Teorema 7. Un quadrilatero che ha i lati opposti eguali è un parallelogrammo.

Teorema 8. Un quadrilatero che ha gli angoli opposti eguali è un parallelogrammo

Teorema 8. Un quadrilatero che ha le diagonali che si bisecano è un parallelogrammo.

Teorema 9. Un quadrilatero se ha due lati opposti eguali e anche paralleli, è un parallelogrammo

Teorema 10. Un parallelogrammo che ha un angolo retto ha tutti gli angoli retti

Teorema 11. Le diagonali di un rettangolo sono eguali

Teorema 12. Un parallelogrammo che ha le diagonali eguali è un rettangolo.

Teorema 13. Le diagonali di un rombo sono perpendicolari e bisettrici degli angoli.

Teorema 14. Inverso del precedente: se le diagonali di un parallelogrammo sono perpendicolari o bisettrici degli angoli, il parallelogrammo è un rombo.

Teorema 15. Un parallelogrammo è un quadrato se ha le diagonali eguali e perpendicolari.

Teorema 16. Un parallelogrammo è un quadrato se ha le diagonali eguali e se una di esse è bisettrice di un angolo.

Teorema 17. Teorema di Talete. In un fascio di rette parallele tagliate da due trasversali, se due segmenti di una trasversale sono eguali, sono eguali i segmenti a essa corrispondenti sull'altra trasversale; se sono disuguali, lo sono anche i corrispondenti e tali che al maggiore corrisponde il maggiore e la minore il minore.

Corollario. Se un lato di un triangolo si divide in parti eguali e per i punti di divisione si conducono le parallele a un altro lato, il terzo lato resta diviso nello stesso numero di parti eguali