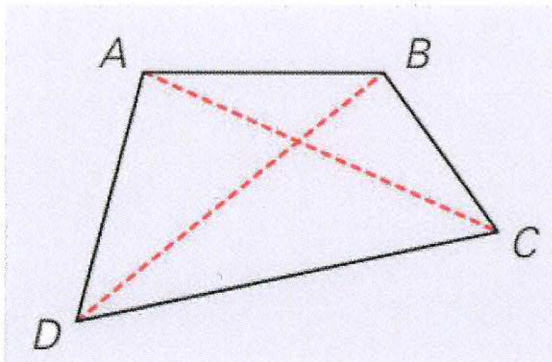
QUADRILATERI E PARALLELOGRAMMI

Definizioni

1) Un **quadrilatero** è un poligono di quattro lati.

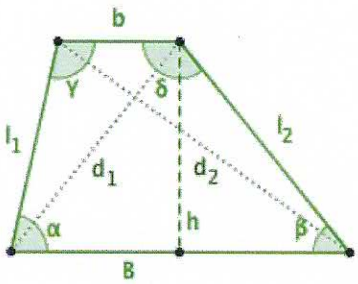
2) I **vertici** o i **lati** di un quadrilatero non consecutivi sono definiti **opposti,** così gli **angoli.**

3) Un quadrilatero ha solo due diagonali.

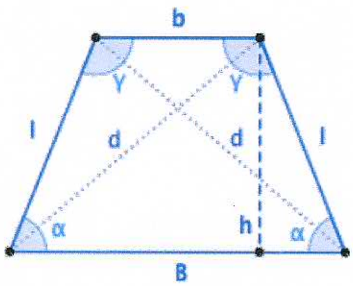


4) Un quadrilatero con soli due lati opposti paralleli e diseguali e un **trapezio.** I lati opposti sono le **basi,** gli altri due sono gli **obliqui**.

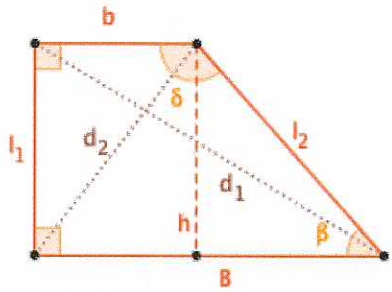
5) Se i lati obliqui sono eguali si ha un **trapezio isoscele**; se sono diseguali, il **trapezio** è **scaleno**; se un lato non parallelo cade perpendicolarmente sulle basi, il **trapezio** è **rettangolo.**



Trapezio scaleno



Trapezio isoscele



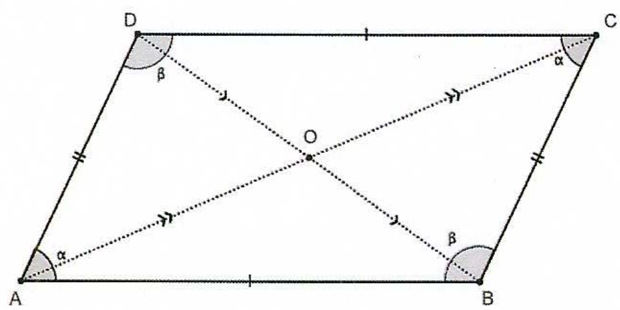
Trapezio rettangolo

6) **L'altezza di un trapezio** è la distanza tra le due basi.

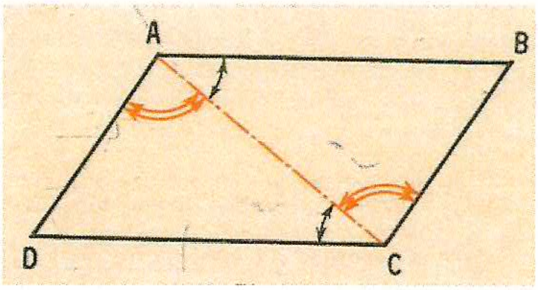
Teorema 1. In un trapezio sono supplementari le coppie di angoli agli estremi dei lati non paralleli (perché coniugati interni).

8) Un quadrilatero con i lati opposti paralleli e un **parallelogrammo.**

Teorema 2. In un parallelogrammo gli angoli adiacenti a uno qualunque dei lati sono supplementari (perché coniugati interni).

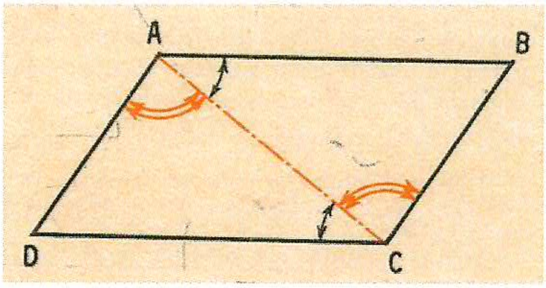


Teorema 3. Un parallelogrammo è diviso da una sua diagonale in due triangoli eguali.

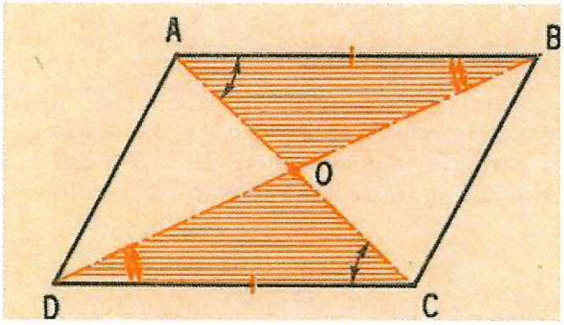


Teorema 4. I lati opposti di un parallelogrammo sono eguali (per il teorema precedente).

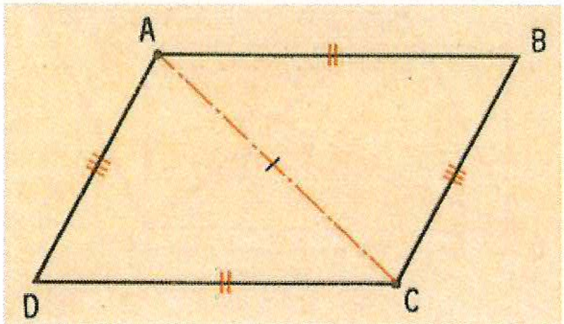
Teorema 5. Gli angoli opposti di un parallelogrammo sono eguali (perché somma di angoli alterni interni).



Teorema 6. Le diagonali di un parallelogrammo si tagliano in segmenti eguali. (AOB e DOC sono, infatti, triangoli eguali).

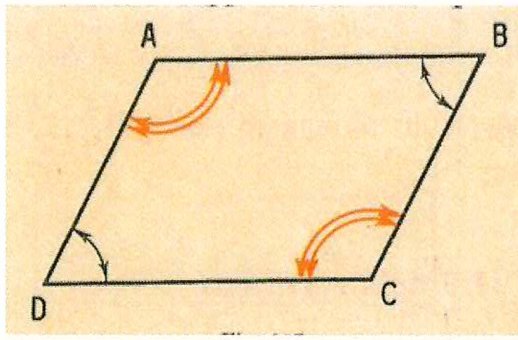


Teorema 7. Un quadrilatero che ha i lati opposti eguali è un parallelogrammo.



Teorema 8. Un quadrilatero che ha gli angoli opposti eguali è un parallelogrammo.

Ipotesi: $\hat{A} = \hat{C}$; $\hat{B} = \hat{D}$. (1)



Tesi: $\overline{AB} // \overline{DC}$; $\overline{AD} // \overline{BC}$.

Dimostrazione:

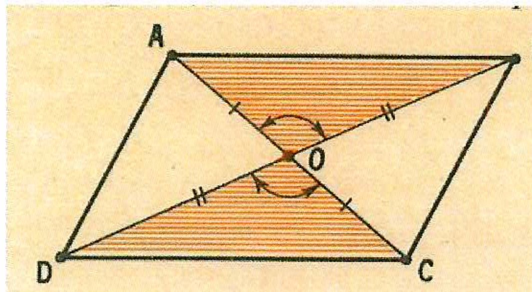
- La somma degli angoli interni di un quadrilatero è 2p.
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 2p$.

- $\hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{D}$ per la (1). Perciò $\hat{A} + \hat{B} = 1p$. $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono perciò supplementari. (2)

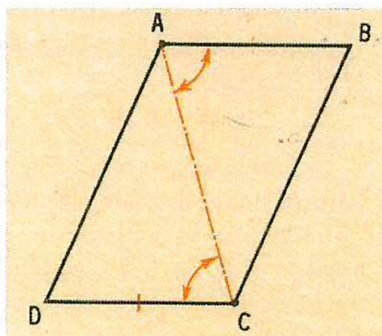
- Considerando AD e BC tagliate dalla trasversale AB, abbiamo gli angoli coniugati interni supplementari per la (2). AD e BC sono dunque parallele.

- Lo stesso vale per AB e DC. C.vd.

Teorema 8. Un quadrilatero che ha le diagonali che si bisecano è un parallelogrammo.

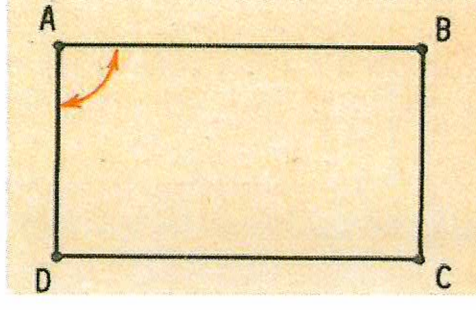


Teorema 9. Un quadrilatero se ha due lati opposti eguali e anche paralleli, è un parallelogrammo.



Teorema 10. Un parallelogrammo che ha un angolo retto ha tutti gli angoli retti e si definisce **rettangolo.**

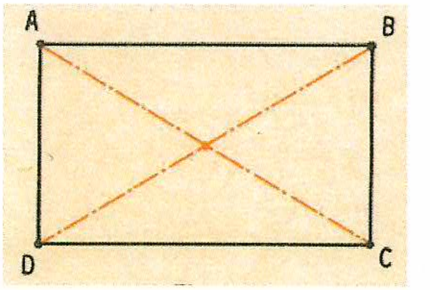
Se $\hat{A} = 90°$, anche $\hat{D} = 90°$ perché coniugati interni.



$\hat{B}$ e $\hat{C}$ sono opposti poi ad $\hat{A}$ e $\hat{D}$, anch'essi di 90°.

Teorema 11. Le diagonali di un rettangolo sono eguali.

Teorema 12. Un parallelogrammo che ha le diagonali eguali è un rettangolo.



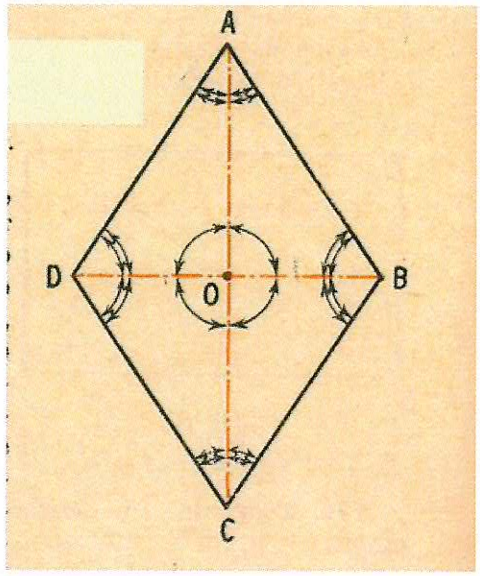
Ipotesi: $\overline{AC}=\overline{BD}$; $\overline{AD}=\overline{BC}$; $\overline{AB}=\overline{DC}$. **Tesi:** $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\hat{D}=90°$

Dimostrazione:

- $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$ per il terzo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\overline{DC}$ in comune; $\overline{AC}=\overline{BD}$ e $\overline{AD}=\overline{BC}$ per ipotesi.
- In particolare $\widehat{ADC}=\widehat{BCD}$, che però essendo coniugati interni sono supplementari. Supplementari e eguali allo stesso tempo vuol dire che sono entrambi di 90°. C.v.d.

Definizione: Si dice rombo (o losanga) un quadrilatero con tutti i lati eguali (senza essere rettangolo).

Teorema 13. Le diagonali di un rombo sono perpendicolari e bisettrici degli angoli.



Ipotesi:

$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}$; (1)

$\overline{AD}//\overline{BC}$; $\overline{DC}//\overline{AB}$; (2)

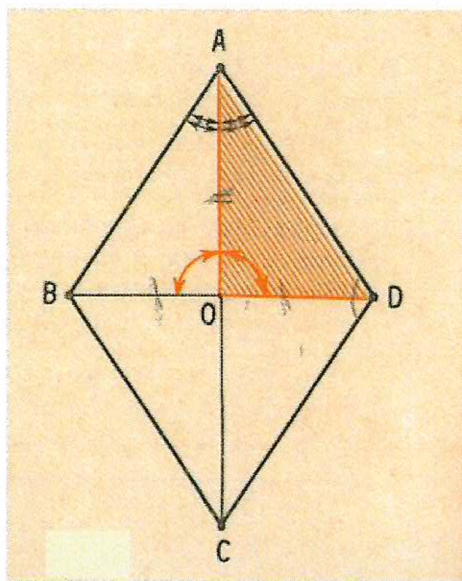
Tesi: $\overline{AC} \perp \overline{DB}$

$\widehat{DAC} = \widehat{BAC}$...

Dimostrazione:

- Il triangolo DAB con $\overline{DA}=\overline{AB}$ è isoscele;
- Le diagonali di un parallelogrammo si bissecano, perciò $\overline{DO}=\overline{OB}$;
- La mediana relativa alla base in un triangolo isoscele corrisponde all'altezza e alla bisettrice. Perciò $\overline{AO}$ è bisettrice di $\widehat{DAB}$ e cade perpendicolarmente su $\overline{DB}$.
- Ripetendo lo stesso ragionamento sugli altri tre triangoli isosceli si è dimostrata la tesi.

Teorema14. Inverso del precedente: se le diagonali di un parallelogrammo sono perpendicolari **o** bisettrici degli angoli, il parallelogrammo è un rombo.



Ipotesi: AB//DC; AD//BC

$\overline{AC} \perp \overline{BD}$ oppure $\widehat{BAC}=\widehat{DAC}$...

Tesi: $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}$

Dimostrazione.

I caso:

Si considerino i quattro triangoli in cui è scomposta la figura, eguali per il primo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\overline{AO}=\overline{OC}$, $\overline{BO}=\overline{OD}$ per la proprietà dei poligoni che hanno le diagonali che si bissecano; $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, per cui tutti gli angoli in O sono di 90°. Sono di conseguenza eguali tutti i lati secondo la richiesta della tesi.

II caso:

Le bisettrici di angoli eguali, quali sono gli angoli opposti in un parallelogrammo, danno angoli eguali. Il triangolo ABC perciò con gli angoli alla base eguali, ha $\overline{AB}=\overline{BC}$. Quando in un parallelogrammo si hanno due lati consecutivi eguali, il parallelogrammo è un rombo. C.v.d.

Definizione. Il quadrato è un quadrilatero con lati eguali e angoli retti e gode di tutte le proprietà del rettangolo e del quadrato.

a) Una diagonale lo divide in due triangoli eguali;

b) I lati opposti sono eguali;

c) Gli angoli opposti sono eguali;

d) Le diagonali si bisecano e sono eguali;

e) Le diagonali sono bisettrici degli angoli;

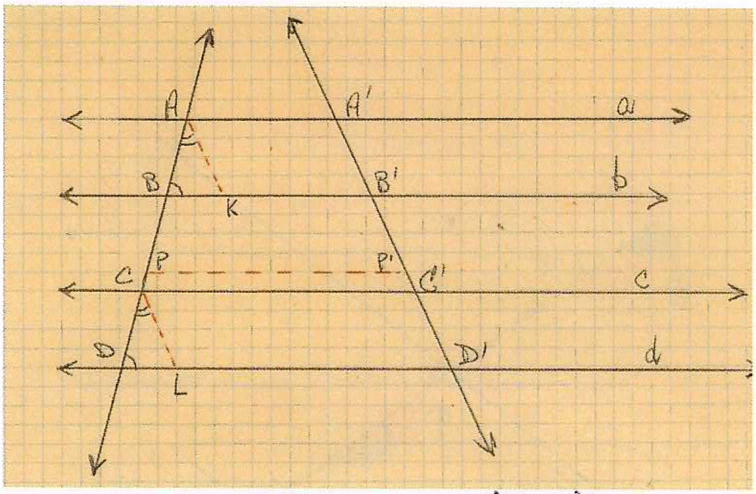
f) Le diagonali lo dividono in quattro triangoli rettangoli isosceli eguali.

Teorema 15. Un parallelogrammo è un quadrato se ha le diagonali eguali e perpendicolari.

Teorema 16. Un parallelogrammo è un quadrato se ha le diagonali eguali e se una di esse è bisettrice di un angolo.

Definizione: una retta di un piano con le sue infinite parallele determina un **fascio di rette parallele.**

Teorema 17. Teorema di Talete. In un fascio di rette parallele tagliate da due trasversali, se due segmenti di una trasversale sono eguali, sono eguali i segmenti a essa corrispondenti sull'altra trasversale; se sono disuguali, lo sono anche i corrispondenti e tali che al maggiore corrisponde il maggiore e la minore il minore.



Ipotesi: a//b//c//d (1)

$\overline{AB}=\overline{CD}$ (2)

$\overline{AB}<\overline{BC}$ (3)

Tesi: $\overline{A'B'}=\overline{C'D'}$ (A)

$\overline{A'B'}<\overline{B'C'}$ (B)

Dimostrazione:

(A)

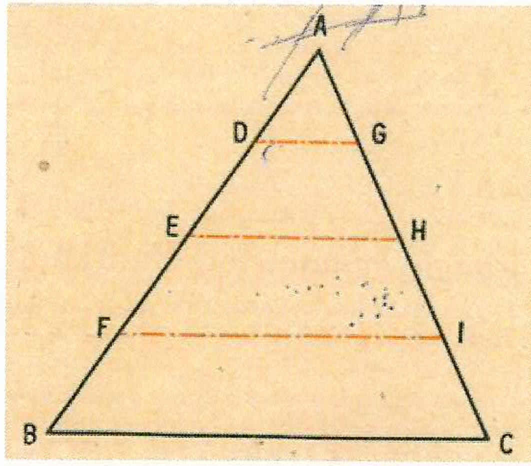
- Si tracciano da A e da C due parallele ad A'D' che incontreranno b e d in K e L.
- $\widehat{ABK}=\widehat{CDL}$ per il secondo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\overline{AB}=\overline{CD}$ per la (2): $\widehat{BAK}=\widehat{DCL}$ perché corrispondenti delle rette parallele AK e CL tagliate dalla trasversale AD; $\widehat{ABK}=\widehat{CDL}$, perché corrispondenti delle rette parallele b e d tagliate dalla trasversale AD. In particolare $\overline{AK}=\overline{CL}$. (4)

- I quadrilateri AA'B'B e CC'D'D hanno i lati paralleli per ipotesi e per costruzione, sono perciò dei parallelogrammi che hanno i lati opposti eguali, in particolare $\overline{AK}=\overline{A'B'}$ e $\overline{CL}=\overline{C'D'}$.
- Per la (4) e la proprietà transitiva $\overline{A'B'}=\overline{C'D'}$.

(B)

- Se $\overline{AB}<\overline{BC}$ ci sarà sul segmento BC un punto P tale che $\overline{AB}=\overline{BP}$.
- La parallela per P al fascio di rette secherà A'D' in P'. Per la dimostrazione (A) $\overline{BP}=\overline{B'P'}$.
- Ma $\overline{BP}=\overline{AB}<\overline{BC}$; così pure $\overline{B'P'}=\overline{A'B'}<\overline{B'C'}$. C.v.d.

Corollario. Se un lato di un triangolo si divide in parti eguali e per i punti di divisione si conducono le parallele a un altro lato, il terzo lato resta diviso nello stesso numero di parti eguali.



ESERCIZI V LEZIONE

1) Dato il parallelogrammo ABCD, si congiungano i punti medi E e F dei lati AB e CD rispettivamente con i vertici C e A. Dimostrare che le predette congiungenti dividono la diagonale BD in tre segmenti eguali.

2) Dimostrare che i tre excentri di un triangolo determinano un altro triangolo i cui lati passano per i vertici del triangolo dato.

3) Dato il parallelogrammo ABCD, condurre per il vertice A una retta qualunque r che non tagli il parallelogrammo stesso. Dimostrare che la distanza CH del vertice C dalla retta r è eguale alla somma delle distanze BE e DF di B e D dalla stessa retta r.

4) Dimostrare che se si congiungono due punti di una diagonale di un rombo a eguale distanza dagli estremi, con gli estremi dell'altra diagonale, si ottiene un rombo.

5) Dimostrare che un triangolo è isoscele se la mediana e la bisettrice relative a uno stesso lato coincidono.

6) Dimostrare che se un trapezio rettangolo ha la diagonale minore eguale al lato obliquo, la base maggiore è il doppio della minore.

7) Dimostrare che, se per un punto interno a un triangolo equilatero si conducono tre corde parallele ai lati, la somma delle tre corde è eguale al doppio del lato.