

SOMMA DEGLI ANGOLI DI UN TRIANGOLO E DI UN POLIGONO

Teorema 1. La somma degli angoli interni di un triangolo è eguale a un angolo piatto (=180°).

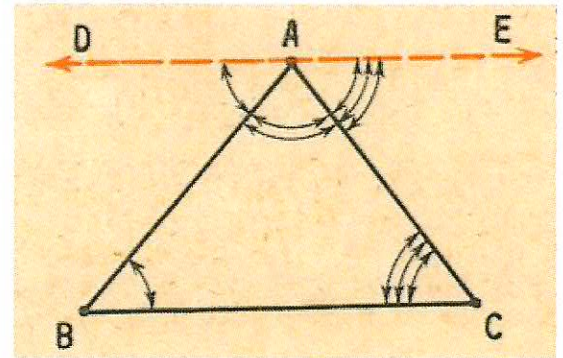
Ipotesi: $DE \parallel BC$

Tesi: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

Dimostrazione:

- Dopo aver tracciato la parallela al lato BC per A, considerare le due parallele, DE e BC, prima intersecate da AC, poi da BA. Gli angoli alterni interni per teorema sono eguali: $\hat{CAE} = \hat{B}$; $\hat{DAB} = \hat{C}$.

- $\hat{DAB} + \hat{BAC} + \hat{CAE}$ danno come somma 180°. Per la proprietà transitiva anche $\hat{BAC} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$.
C.v.d.



Questo teorema ha importantissime conseguenze:

- La somma di due angoli di un triangolo è sempre inferiore a 180°;
- Un triangolo non può avere più di un angolo retto;
- Se un triangolo ha un angolo retto, gli altri due sono acuti e complementari;
- Un triangolo non può avere più di un angolo ottuso;
- Se un triangolo ha un angolo ottuso, gli altri due sono acuti e la loro somma è inferiore a 90°;
- Un triangolo equilatero ha tutti gli angoli acuti che misurano 60°;
- Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono acuti;
- Noto un angolo alla base di un triangolo isoscele, si può calcolare l'angolo al vertice;
- Se due angoli di un triangolo sono eguali ai due angoli di un altro triangolo, anche il terzo angolo è eguale.

Teorema 2. Un angolo esterno di un triangolo è eguale alla somma dei due interni a esso non adiacenti.

Per il teorema precedente:

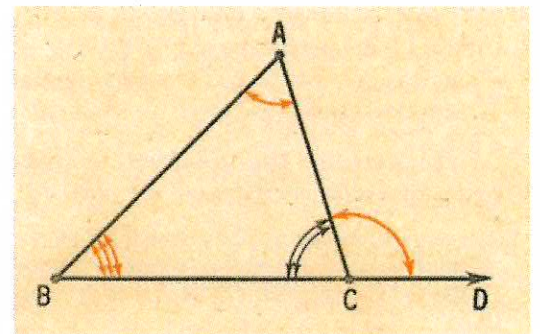
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{ACB} = 180^\circ.$$

Ma anche:

$$\hat{ACD} + \hat{ACB} = 180^\circ$$

Valutando le due eguaglianze si conclude che:

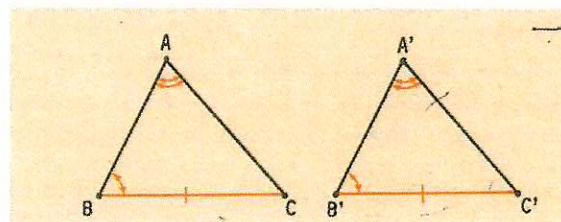
$$\hat{A} + \hat{B} = \hat{ACD} \text{ supplementari di } \hat{ACB}.$$



Teorema 3: quarto criterio d'eguaglianza dei triangoli. Due triangoli sono eguali se hanno uguali rispettivamente due angoli e un lato qualsiasi.

Ipotesi: $\hat{A} = \hat{A}'$; $\hat{B} = \hat{B}'$
 $\overline{BC} = \overline{B'C'}$

Tesi: $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$



Dimostrazione:

Per il teorema precedente, se si conoscono in un triangolo le misure di due angoli, si conosce anche la misura del terzo che è in ogni caso supplementare alla somma dei primi due. In questo caso si evince che $\hat{C} = \hat{C}'$ per differenza di misure uguali ($180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) / \hat{A}' + \hat{B}'$).

Con i dati offerti dall'ipotesi si ricade perciò in ogni caso nel secondo criterio d'eguaglianza dei triangoli e $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

Criteri d'eguaglianza dei triangoli rettangoli

I primi tre sono evidenti:

- due cateti rispettivamente uguali... + un angolo retto
- l'ipotenusa e un angolo acuto... + un angolo retto
- un cateto e un angolo acuto... + un angolo retto

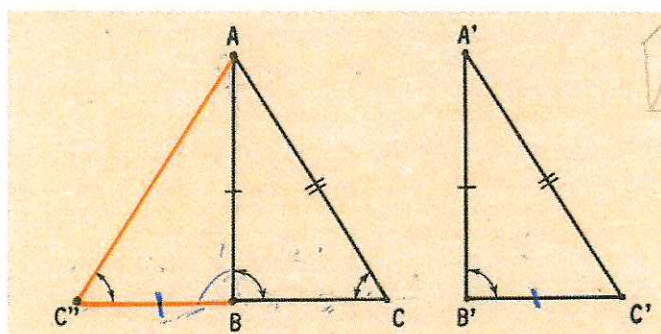
e ricadono nel primo criterio d'eguaglianza o nel quarto.

Più complesso è il quarto criterio d'eguaglianza dei triangoli rettangoli.

Teorema 3: quarto criterio d'eguaglianza dei triangoli rettangoli. Due triangoli rettangoli sono eguali se l'ipotenusa e un cateto dell'uno sono rispettivamente uguali all'ipotenusa e a un cateto dell'altro.

Ipotesi: $\hat{B} = \hat{B}' = 90^\circ$; (1)
 $\overline{AB} = \overline{A'B'}$; (2)
 $\overline{AC} = \overline{A'C'}$. (3)

Tesi: $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$



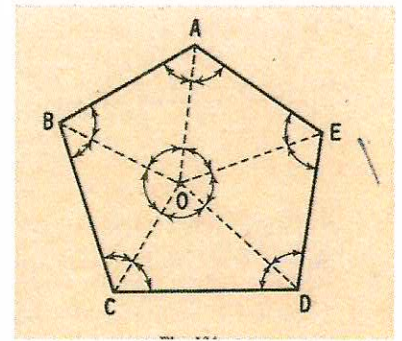
Dimostrazione:

- Si prolunghi $\overline{BC}$ di un segmento $\overline{BC''} = \overline{B'C'}$ e si unisca A con C''.
- Il triangolo $\triangle ABC'' = \triangle A'B'C'$ per il primo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ per la (2); $\overline{B'C''} = \overline{B'C'}$ per costruzione; $\hat{ABC''} = \hat{A'B'C'} = 90^\circ$, perché il primo è adiacente a un angolo retto per la (1), e il secondo è retto sempre per la (1).
- In particolare $\overline{AC''} = \overline{A'C'}$. Ma $\overline{A'C'} = \overline{AC}$ per la (2); perciò se si considera il triangolo isoscele $\triangle CAC''$, si conclude che $\hat{C} = \hat{C''}$ e per la proprietà transitiva $\hat{C} = \hat{C''} = \hat{C}'$.
- A questo punto l'uguaglianza dei due triangoli richiesta dalla tesi, può essere dimostrata con qualsiasi criterio d'eguaglianza.

C.v.d.

Teorema 4. La somma degli angoli interni di un poligono è eguale a tanti angoli piatti quanti sono i lati meno due angoli piatti.

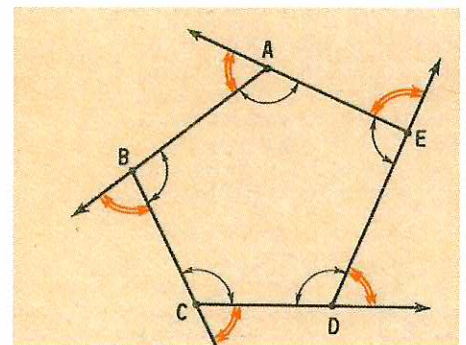
- Si consideri il poligono ABCDE: il suo centro può essere unito a tutti i suoi angoli così che a ogni lato corrisponde un triangolo.
- La somma degli angoli in un triangolo è di 180° . La somma perciò degli angoli interni del poligono in questo caso è di cinque angoli piatti, gli angoli dei cinque triangoli costruiti internamente ai suoi lati, da cui bisogna però sottrarre l'angolo giro in O che non appartiene al poligono.
- Dunque 5 (il numero dei lati) $\times 180 - 360$ (i due angoli piatti).



C.v.d.

Teorema 5. La somma degli angoli esterni di un poligono è eguale a due angoli piatti.

- Dato il poligono ABCDE, in questo caso di 5 lati, si prolunghino i lati del poligono tutti dallo stesso verso. Si avranno angoli interni adiacenti e supplementari ad angoli esterni.
- La somma degli angoli interni più gli esterni è perciò 180×5 .



Se si tolgono agli angoli esterni gli angoli interni, per il teorema precedente si ha, con $p = \text{angolo piatto} = 180^\circ$:

$$\text{Somma angoli esterni} = 5p - (5p - 2p) = 5p - 5p + 2p = 2p = 180^\circ.$$

Più genericamente con $n = \text{numero dei lati di un poligono generico}$:

$$np - (np - 2p) = 2p$$

C.v.d.

Teorema 6. In un triangolo se due lati sono diseguali, a lato maggiore si oppone angolo maggiore e a lato minore angolo minore.

Ipotesi: $\overline{AB} > \overline{AC}$

Tesi: $\hat{C} > \hat{B}$

Dimostrazione:

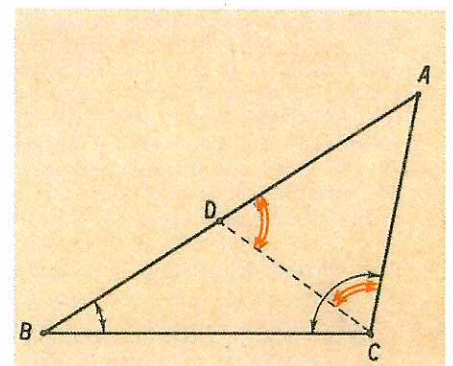
- Si stacchi un segmento su $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, tale che sia $\overline{AD} = \overline{AC}$; e si unisca D con C.

- Si consideri il triangolo DCA, è isoscele per costruzione e ha eguali così gli angoli alla base $\hat{ADC}$ e $\hat{ACD}$.

- Essendo stato tracciato $\overline{CD}$ all'interno del triangolo, $\hat{BCA} > \hat{ACD} = \hat{ADC}$.

- $\hat{ADC}$ è però un angolo adiacente del triangolo BDC. Perciò $\hat{ADC} = \hat{DBC} + \hat{DCB}$ per teorema.

- $\hat{ADC} > \hat{DBC}$. Se però $\hat{BCA} > \hat{ADC}$, per la precedente a maggior ragione $\hat{C} > \hat{B}$. C.v.d.



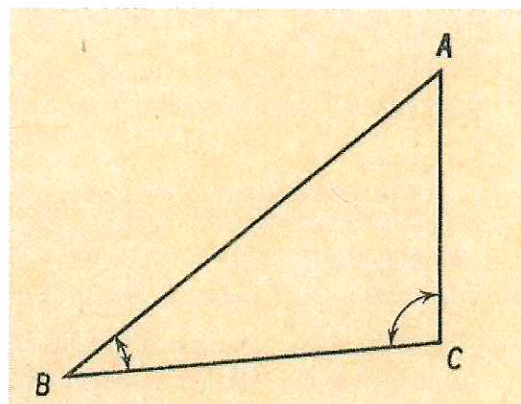
Teorema 7. In un triangolo se due angoli sono diseguali, ad angolo maggiore si oppone lato maggiore e ad angolo minore lato minore.

Ipotesi: $\hat{C} > \hat{B}$

Tesi: $\overline{AB} > \overline{AC}$

Dimostrazione:

- Se $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\hat{B} = \hat{C}$, ma questa eguaglianza sarebbe contro l'ipotesi.
- Se $\overline{AC} > \overline{AB}$ la disequaglianza contravverrebbe il teorema che dice che in un triangolo se due lati sono diseguali, a lato maggiore si oppone angolo maggiore e a lato minore angolo minore.
- per il principio di esclusione è dimostrata la tesi: $\overline{AB} > \overline{AC}$. C.v.d.



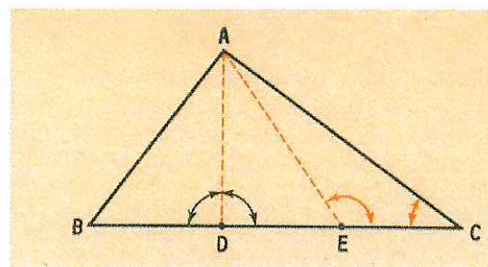
Teorema 8. In un triangolo il segmento che unisce un vertice con un punto qualsiasi del lato opposto è minore di almeno uno degli altri due lati se non di entrambi.

Ipotesi: $\overline{AD} \perp \overline{BC}$; $\overline{AE} \cap \overline{BC}$

Tesi: $\overline{AD} < \overline{AC}$; $\overline{AE} < \overline{AC}$

Dimostrazione:

- Se $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, abbiamo due triangoli rettangoli ADB e ADC di cui $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ sono ipotenuse, maggiori dunque entrambe di $\overline{AD}$, cateto.
- Se $\overline{AE} \cap \overline{BC}$ ma non perpendicolarmente determina due angoli, uno acuto e l'altro, $\hat{AEC}$, ottuso. Il triangolo AEC con un angolo ottuso in E avrà come lato maggiore quello opposto all'angolo ottuso, perciò $\overline{AC} > \overline{AE}$ che vuol dire $\overline{AE} < \overline{AC}$. C.v.d.



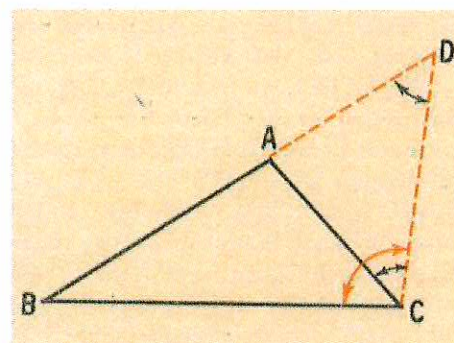
Teorema 8. In ogni triangolo un lato è minore della somma degli altri due.

Ipotesi: ABC = triangolo

Tesi: $\overline{BC} < \overline{BA} + \overline{AC}$

Dimostrazione:

- Si prolunghi il lato AB di un segmento $\overline{AD} = \overline{AC}$; il triangolo ADC è isoscele per costruzione e in particolare $\hat{D} = \hat{DCA}$.
- Ma $\hat{DCA} = \hat{D} < \hat{BCD}$ poiché un lato del primo cade sulla semiretta interna all'angolo BCD.
- Se si considera poi il triangolo BCD, all'angolo minore D si oppone il lato minore BC, all'angolo maggiore BCD il lato maggiore BD.
- $\overline{BD} = \overline{BA} + \overline{AC}$. Dunque $\overline{BC} < \overline{BA} + \overline{AC}$. C.v.d.



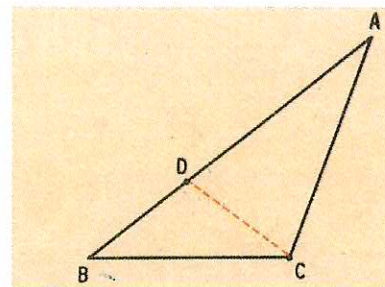
Teorema 9. In ogni triangolo un lato è maggiore della differenza degli altri due.

Ipotesi: $ABC = \text{triangolo}$

Tesi: $\overline{BC} > \overline{AB} - \overline{AC}$

Dimostrazione:

- Si riporti su $\overline{AB}$ un segmento $\overline{AD} = \overline{AC}$. Per differenza di segmenti eguali, $\overline{DB} = \overline{AB} - \overline{AC} / \overline{AD}$.
- Il triangolo ADC è isoscele, perciò gli angoli alla base sono acuti.
- Se $\widehat{ADC}$ è acuto, l'angolo adiacente, $\widehat{BDC}$ è ottuso.
- Considerando il triangolo BDC , ottusangolo, $\overline{BC}$ risulta essere il lato maggiore perché opposto all'angolo ottuso. Perciò $\overline{BC} > \overline{DB}$ ($= \overline{AB} - \overline{AC}$). C.v.d.



Teorema 9. Se due lati di un triangolo sono rispettivamente eguali a due lati di un altro triangolo, ma tra i due lati dell'uno vi è compreso un angolo maggiore di quello compreso fra i due lati dell'altro, il terzo lato è maggiore nel triangolo che ha l'angolo maggiore.

Ipotesi:

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} \quad (1)$$

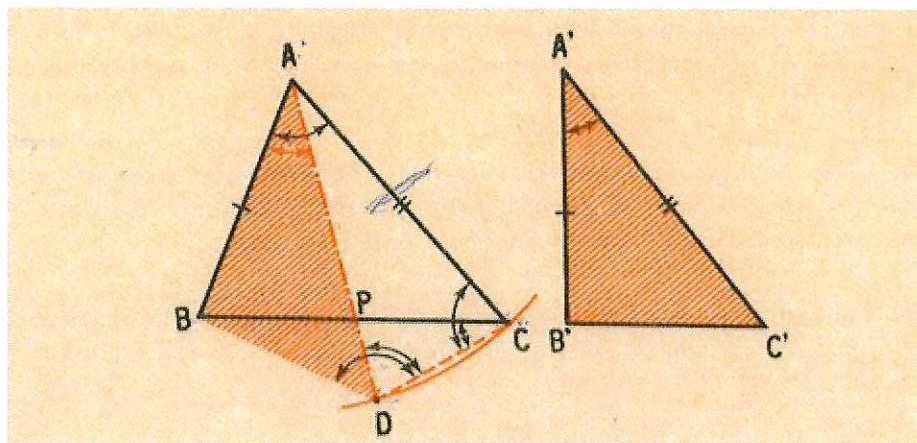
$$\overline{AC} = \overline{A'C'} \quad (2)$$

$$\widehat{BAC} > \widehat{B'A'C'} \quad (3)$$

Tesi: $\overline{B'C'} < \overline{BC}$

Dimostrazione:

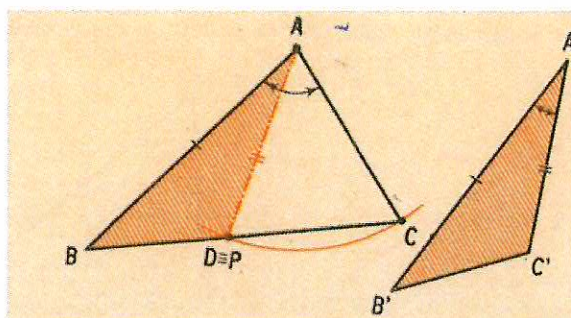
I caso: $\overline{AB} < \overline{AC}$



- Si sovrapponga $\triangle A'B'C'$ su $\triangle ABC$, facendo corrispondere $\overline{AB}$ con $\overline{A'B'}$ per la (1). Poiché siamo nel I caso C' cade fuori $\triangle ABC$ e chiameremo il punto, D.
- Si unisca D con C. Abbiamo un triangolo isoscele, DAC , per la (2), dove $\widehat{ACD} = \widehat{ADC}$.
- $\widehat{BCD} < \widehat{ACD}$ come risulta da costruzione; quindi sarà pure $\widehat{BCD} < \widehat{ADC}$ ($= \widehat{ACD}$).
- Se $\widehat{BCD} < \widehat{ADC}$, a maggiore ragione, sempre per costruzione, $\widehat{BCD} < \widehat{BDC}$.
- Se si considera il triangolo BCD si osserva che due dei suoi lati corrispondono alle lunghezze interessate dalla tesi: $\overline{BC}$ e $\overline{BD} = \overline{B'C'}$.
- Per il teorema che dice che in un triangolo ad angolo maggiore si oppone lato maggiore e ad angolo minore lato minore, si scopre che a $\widehat{BCD} < \widehat{BDC}$, si oppone $\overline{BD} (= \overline{B'C'}) < \overline{BC}$. C.v.d.

Il caso: C' cade su $\overline{BC}$; D e P s'identificano.

Qui la dimostrazione è più semplice perché da costruzione si evince che $\overline{BD} (= \overline{B'C'}) < \overline{BC}$



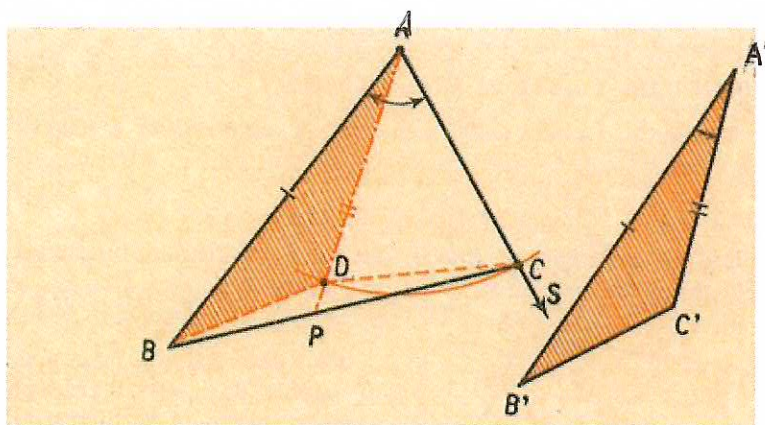
III caso: C' cade all'interno del triangolo ABC.

- Del triangolo isoscele ADC questa volta non consideriamo gli angoli alla base ma quelli adiacenti sotto la base $\widehat{DCS} = \widehat{CDP}$.

- $\widehat{DCB} < \widehat{DCS} (= \widehat{CDP})$ per evidente costruzione.

- Se $\widehat{DCB} < \widehat{CDP}$ a maggiore ragione $< \widehat{BDC}$ per evidente costruzione.

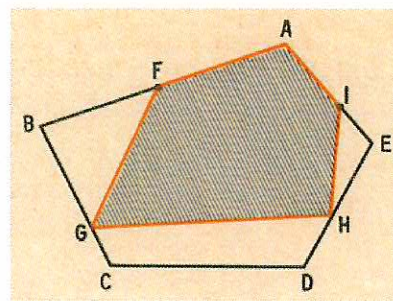
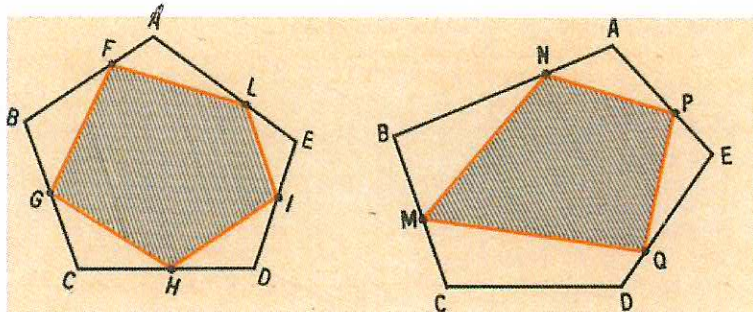
- $\widehat{DCB}$ e $\widehat{CDP}$ sono però gli angoli del triangolo BDC che ha come dimensioni $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$. Per il teorema che dice che in un triangolo ad angolo maggiore si oppone lato maggiore e ad angolo minore lato minore, si scopre che a $\widehat{DCB} < \widehat{BDC}$, si oppone $\overline{BD} (= \overline{B'C'}) < \overline{BC}$. C.v.d.



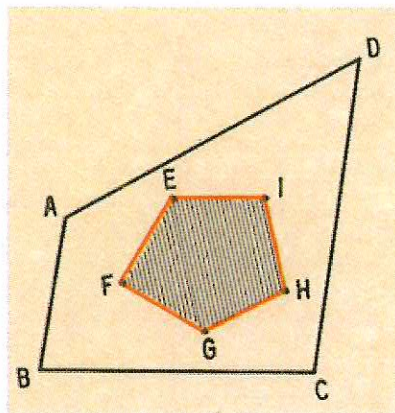
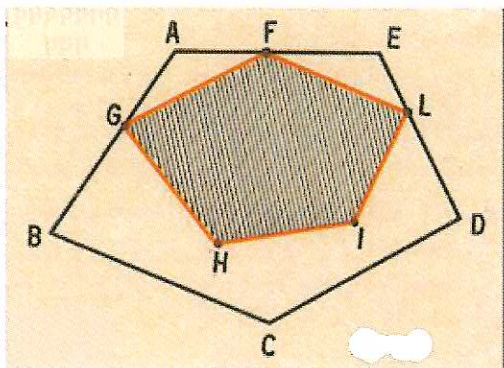
Teorema 10. E' l'opposto del precedente. Non lo dimostriamo. Se due lati di un triangolo sono rispettivamente eguali a due lati di un altro triangolo, ma tra i due lati dell'uno vi è compreso un lato maggiore di quello compreso fra i due lati dell'altro, al lato maggiore si oppone l'angolo maggiore.

DEFINIZIONI

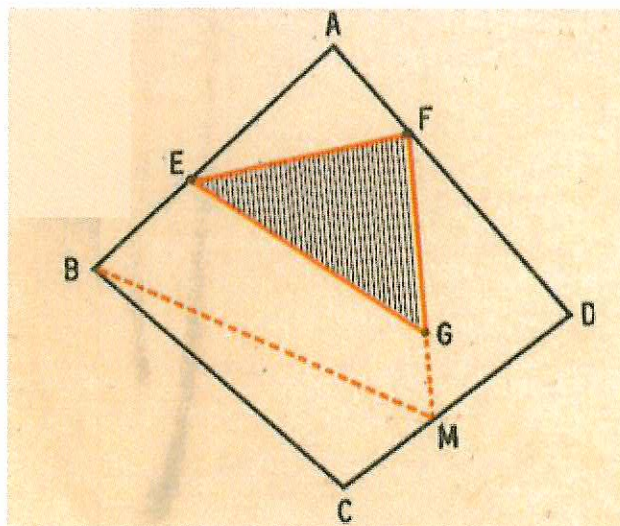
1) Un poligono si dice **iscritto** in un altro se ha tutti i vertici sui lati dell'altro. L'altro si dice **circoscritto** al primo.



2) Un poligono si dice **interno** in un altro se non ha tutti i vertici sui lati dell'altro. L'altro si dice **esterno** al primo.



Teorema 11. Il perimetro di un poligono interno in un altro è minore del perimetro dell'altro a esso esterno.

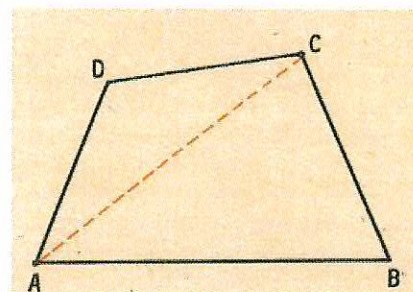


Teorema 12: In un poligono un lato è minore della somma di tutti gli altri.

$$\begin{aligned} \overline{AB} &< \overline{AC} + \overline{CB} \\ \overline{AC} &< \overline{AD} + \overline{DC} \\ \overline{AB} + \overline{AC} &< \overline{AC} + \overline{CB} + \overline{AD} + \overline{DC} \end{aligned}$$

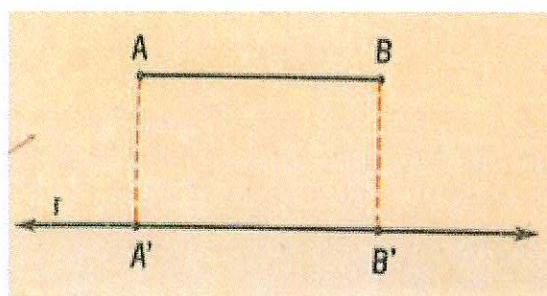
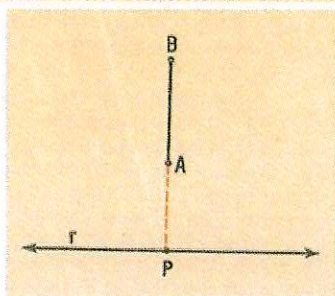
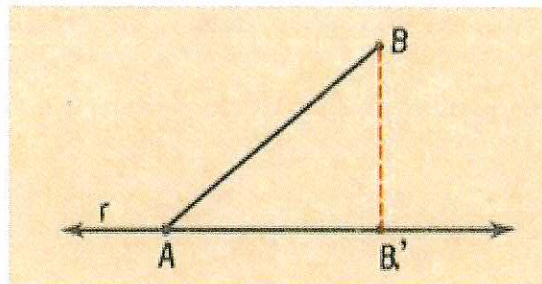
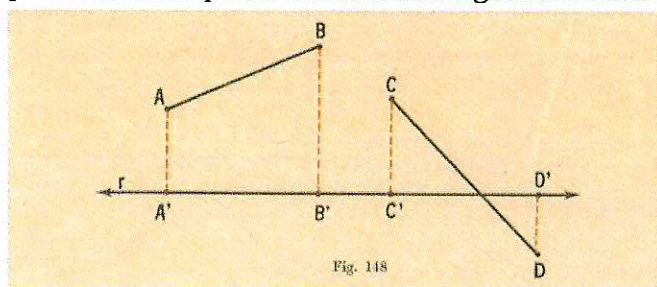
Se si sottrae $\overline{AC}$ a entrambe i membri, si ha:

$$\overline{AB} < \overline{CB} + \overline{AD} + \overline{DC}. \text{ C.v.d.}$$



DEFINIZIONI

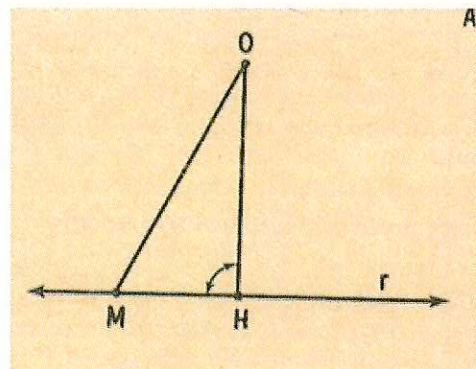
- 1) La **distanza di un punto da una retta** è il segmento perpendicolare compreso tra il punto e la retta.
- 2) Sono **segmenti obliqui** tutti i segmenti, tranne quello perpendicolare, che uniscono un punto fuori da una retta con qualsiasi punto della retta stessa.
- 3) Sono i **piedi** dei segmenti obliqui gli estremi dei segmenti sulla retta.
- 4) La **proiezione di un segmento su una retta** è il segmento della retta compreso fra le proiezioni dei punti estremi del segmento sulla retta.



Alcuni semplici teoremi.

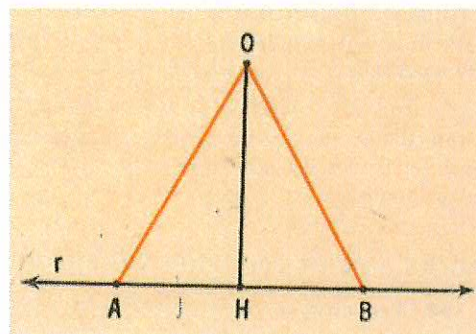
Teorema 1. Dallo stesso punto esterno a una retta, il segmento di perpendicolare è sempre minore di qualsiasi altro segmento obliquo.

$OH < OM$ perché, come si può vedere dalla figura, il segmento perpendicolare è un cateto del triangolo rettangolo MHO , mentre il segmento obliquo è l'ipotenusa.



Teorema 2. Dallo stesso punto esterno a una retta, due segmenti obliqui aventi proiezioni eguali sono eguali.

$AO = OB$ perché ipotenuse dei due triangoli rettangoli OHA e OHB eguali per il primo criterio d'eguaglianza.



Teorema 3. Dallo stesso punto esterno a una retta, due segmenti obliqui aventi proiezioni disuguali sono diseguali e a proiezione maggiore corrisponde segmento maggiore.

Ipotesi: $\overline{AH} > \overline{HB}$

Tesi: $\overline{AO} > \overline{OB}$

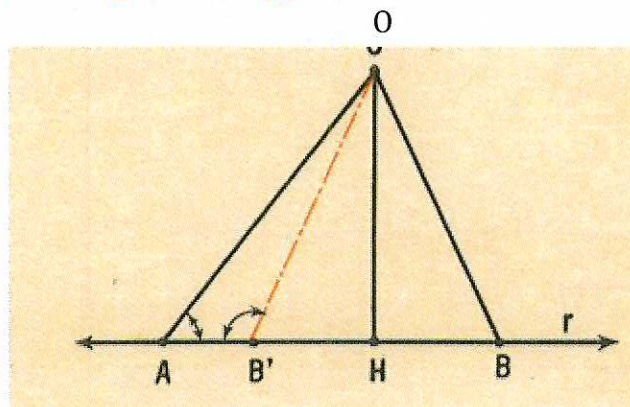
Dimostrazione:

- Si tracci sulla proiezione maggiore $\overline{AH}$, $\overline{OB'} = \overline{OB}$, si ha un triangolo isoscele $B'O B$ che, in quanto tale, ha gli angoli alla base acuti.

- L'angolo $\widehat{OB'A}$ adiacente a $\widehat{OB'H}$ sarà perciò ottuso.

- Ogni ottusangolo ha il lato opposto all'angolo ottuso maggiore degli altri due lati, perciò $\overline{AO} > \overline{OB'}$.

- $\overline{OB'} = \overline{OB}$. Per la proprietà transitiva: $\overline{AO} > \overline{OB}$. C.v.d.



Teorema 4. Le rette perpendicolari ai due lati di un angolo, condotte per il suo vertice formano un angolo acuto eguale al suddetto angolo, oppure un angolo ottuso a esso supplementare.

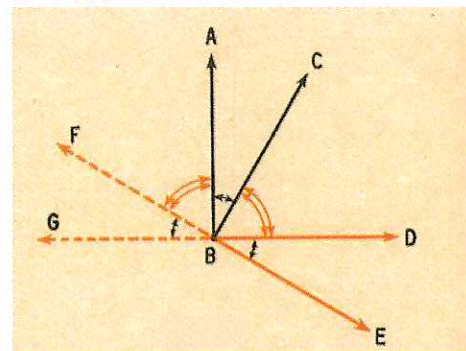
Ipotesi: $FE \perp BC$; $DG \perp AB$

Tesi: $\widehat{ABC} = \widehat{DBE}$; $\widehat{GBE} + \widehat{ABC} = 180^\circ$

Dimostrazione:

- $\widehat{ABC} = \widehat{DBE}$ perché complementari dello stesso angolo $\widehat{CBD}$.

- $\widehat{GBE}$ è supplementare di $\widehat{DBE}$; $\widehat{DBE} = \widehat{ABC}$, perciò per la proprietà transitiva $\widehat{ABC} + \widehat{GBE} = 180^\circ$.



ESERCIZI DELLA IV LEZIONE

- 1) Se D è un punto interno a un angolo acuto BAC, e DB e DC sono le perpendicolari ai lati dell'angolo condotto per D, la bisettrice DF dell'angolo CDB incontra un lato dell'angolo e il prolungamento dell'altro in due punti E e F che si deve dimostrare che sono equidistanti dal vertice.
- 2) In un triangolo scaleno ABC sia $AB > AC$ e AD la bisettrice dell'angolo BAC. Dimostrare che: $\angle ADB - \angle ADC = C - B$.
- 3) Dimostrare che la somma delle distanze di un punto qualunque della base di un triangolo isoscele dai lati è eguale all'altezza relativa a uno di questi lati eguali.
- 4) In un triangolo isoscele ABC, ciascun angolo alla base è la quarta parte dell'angolo al vertice. Tracciare per uno dei vertici della base, per esempio C, la perpendicolare alla base BC che interseca il prolungamento di BA in D. Dimostrare che il triangolo CAD è equilatero.
- 5) Dimostrare che, se per i vertici dei quattro angoli interni di due rette parallele, tagliate da una trasversale, si conducono le bisettrici, i quattro punti in cui esse s'intersecano, sono vertici di un rettangolo.
- 6) Dato un angolo ABC, per il vertice B tracciare le perpendicolari ai lati AB e CB, EB e DB. Dimostrare che la bisettrice dell'angolo ABC corrisponde alla bisettrice dell'angolo DBE e che i due angoli suddetti sono supplementari.
- 7) Sui lati di un triangolo ABC si costruiscono i triangoli equilateri ABF, ACE, BCD. Dimostrare che congiungendo A con D, B con E, C con F, si hanno tre segmenti eguali.