RETTE PERPENDICOLARI E RETTE PARALLELE

Definizione: **due rette si dicono perpendicolari** se s'intersecano formando quattro angoli eguali, tutti retti.

Teorema. Per un punto di un piano si può condurre una e una sola perpendicolare a una retta del piano.

Ipotesi:

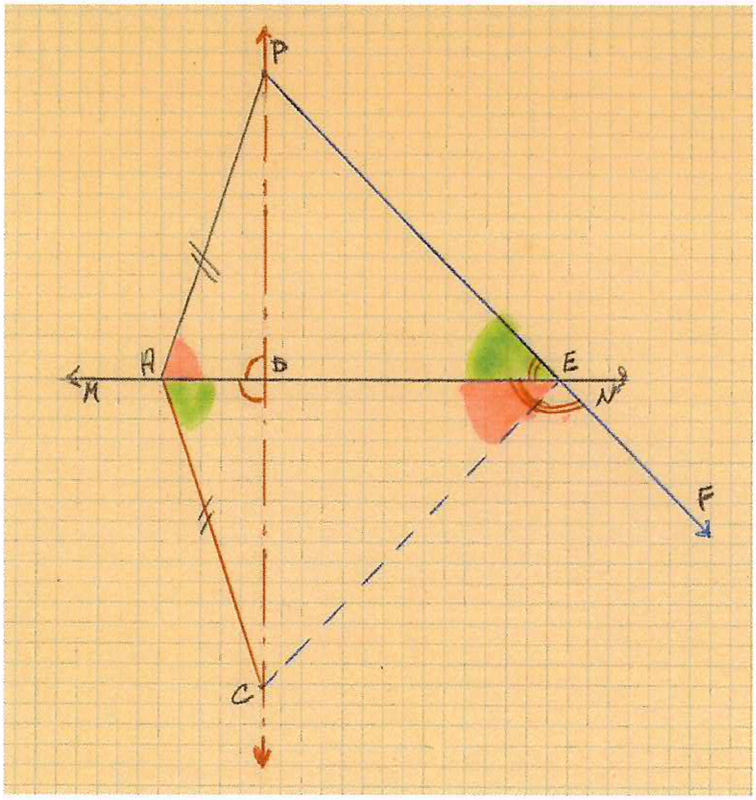
P=punto del piano α

MN=retta del piano α

Tesi:

1) PC $\perp$ MN
2) PC unica perpendicolare a MN per P

Dimostrazione:



1a) Si tracci una retta passante per P e secante MN in A. Se $\widehat{PAN}=\widehat{PAM}$, la retta è perpendicolare a MN e la prima parte della tesi sarebbe dimostrata.

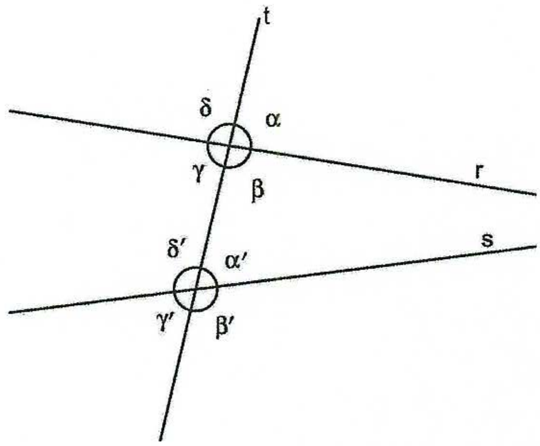
1b) Ma se $\widehat{PAN}\neq\widehat{PAM}$ si avrà da una parte un angolo acuto e dall'altra uno ottuso. Si supponga che l'angolo acuto sia $\widehat{PAN}$.
Si costruisca allora nel semipiano opposto un segmento AC=AP con un'inclinazione rispetto a MN eguale a $\widehat{PAN}$. Si congiunga P con C. Il triangolo CAP è isoscele per costruzione e ha come bisettrice del vertice, MN sempre per costruzione. Nei triangoli isosceli però la bisettrice dell'angolo al vertice è anche altezza e mediana della base. Perciò $\overline{AD}$ che giace sulla retta MN, è perpendicolare a PC. Inoltre PD=DC. (1)

2) Si supponga per assurdo che si possa tracciare per P una seconda retta perpendicolare a MN intersecata in E. Di conseguenza $\widehat{PEA}=\widehat{AEF}=90°$. Se si considerano però i triangoli PED e CED, si trovano eguali per il primo criterio di eguaglianza: DE in comune; $\overline{PD}=\overline{DC}$ e $\widehat{PDE}=\widehat{CDE}$ per la (1). Di conseguenza $\widehat{PED}=\widehat{DEC}$, ma $\widehat{PED}=\widehat{AEF}$. $\widehat{DEC}$ e $\widehat{AEF}$ però non possono essere eguali per la proprietà transitiva avendo entrambi uno stesso lato MN, ma essendo differente l'altro ($\overline{EC}$ ed $\overline{EF}$). L'ipotesi perciò è assurda e per P perpendicolare alla retta MN passa una sola retta la PC. C.v.d

Definizioni

Due rette di un piano si dicono parallele se non hanno nessun punto in comune.

Si dice **trasversale di due o più rette** di un piano, la retta dello stesso piano che le intersechi.



Gli angoli γ, β, δ', α' si definiscono **interni.**

Gli angoli γ', β', δ, α si definiscono **esterni.**

I due gruppi di angoli (γ', δ', γ, δ) e (β', α', β, α) si dicono **dalla stessa banda** della trasversale t.

Gli angoli interni da bande opposte della trasversale si dicono **alterni interni** (δ' e β; γ e α')

Gli angoli esterni da bande opposte della trasversale si dicono **alterni esterni** (γ' e α; β' e δ)

Gli angoli uno interno e l'altro esterno ma dalla stessa banda si dicono **corrispondenti** (γ e γ'; δ e δ'; β e β'; α e α').

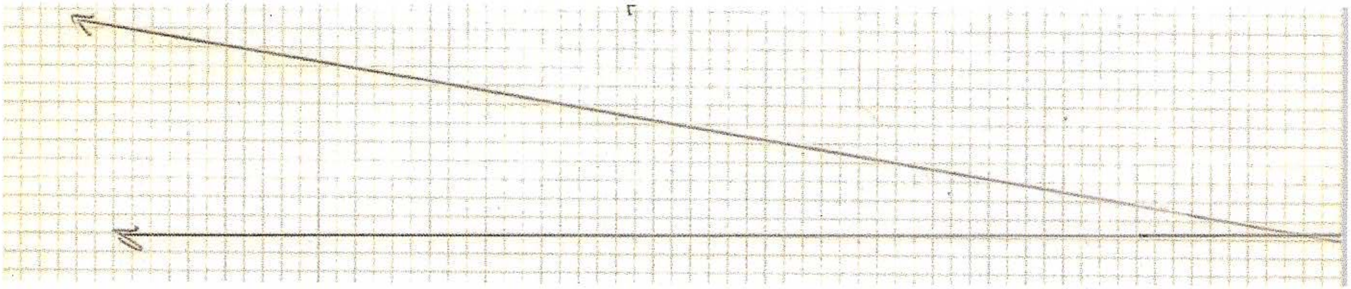
Gli angoli esterni dalla stessa banda si dicono **coniugati esterni** (γ' e δ; α e β').

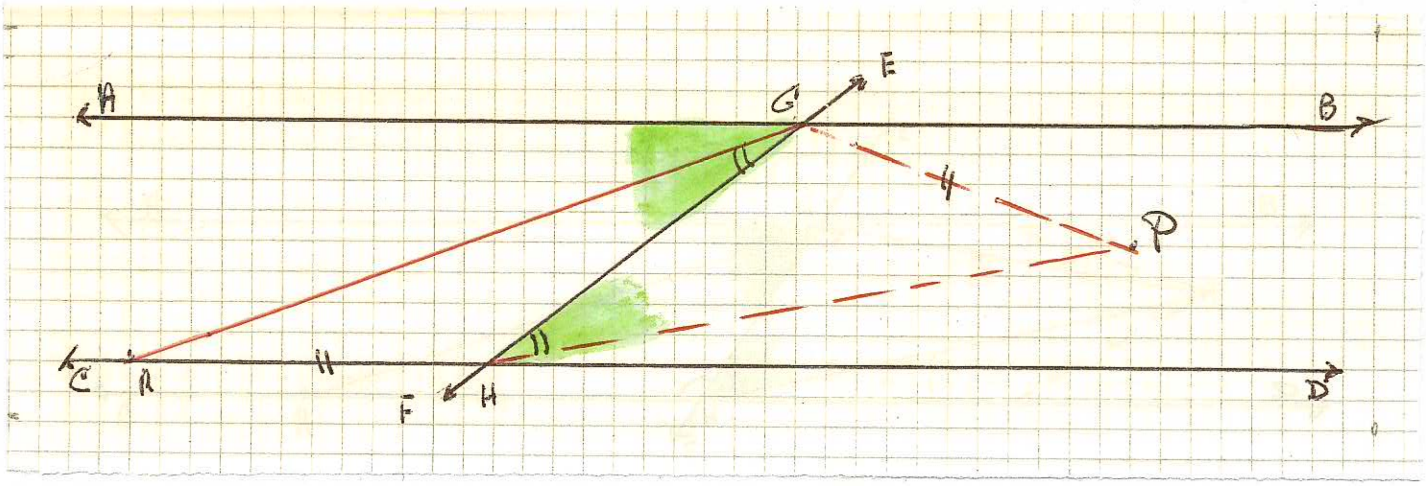
Gli angoli interni dalla stessa banda si dicono **coniugati interni** (γ e δ'; α' e β).

Che cosa è la dimostrazione per assurdo: è quella dimostrazione che per dimostrare la tesi , la nega, e valuta le conseguenze che, rivelandosi assurde, confermano la validità della tesi e la dimostrano. Un esempio pratico: si deve dimostrare che per far lievitare il pane è necessario il lievito; allora si decide di procedere per assurdo: s'impasta il pane senza lievito e se ne traggono le conseguenze che evidentemente confermano la necessità del lievito per far gonfiare la pasta.

Teorema. Due rette di un piano sono parallele se, tagliate da una trasversale, formano coppie di angoli alterni interni eguali.

Ipotesi: $\widehat{HGA}=\widehat{GHD}$; $\widehat{CHG}=\widehat{HGB}$ **Tesi:** AB // CD





Dimostrazione. Si procede per assurdo: s'ipotizza cioè che le due rette s'incontrino in un punto P. Si congiunga G con P e si riporti su HC un segmento $\overline{HR}=\overline{GP}$.

Si considerino i due triangoli HGR e HGP: sono eguali per il primo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\overline{GH}$ in comune; $\overline{RH}=\overline{GP}$ per costruzione; $\widehat{CHG}=\widehat{HGP}$ (perché quest'ultimo, nella costruzione per assurdo, corrisponde a $\widehat{HGB}$. In particolare $\widehat{GHP}=\widehat{HGR}$.

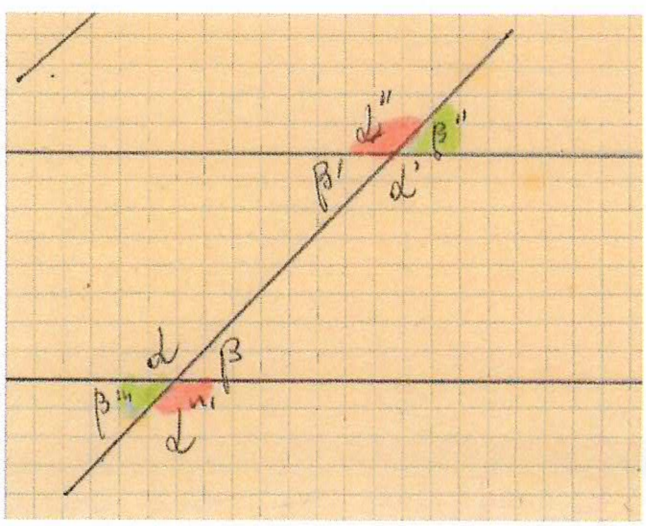
$\widehat{GHP}$ per ipotesi è eguale anche a $\widehat{AGH}$. Per la proprietà transitiva $\widehat{HGR}=\widehat{AGH}$.

Questa eguaglianza risulta però impossibile perché i due angoli hanno lo stesso lato GH, ma gli altri due non sono coincidenti.

Risulta perciò che per non incorrere in questo assurdo è necessario ritenere che le due rette sono parallele. C.v.d.

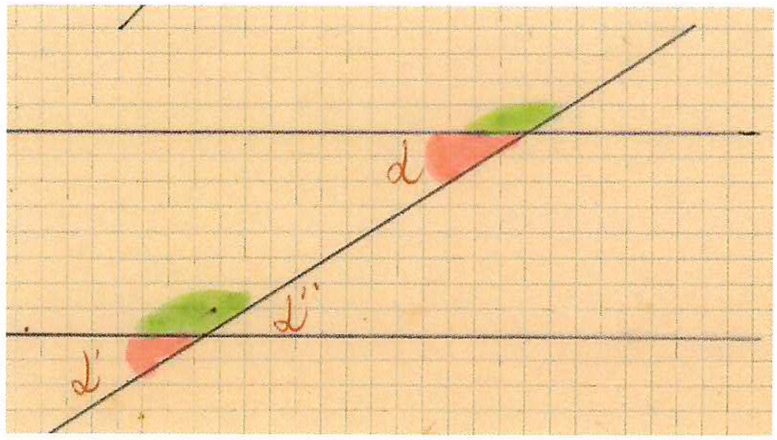
Corollario 1: Due rette di un piano sono parallele se, tagliate da una trasversale, formano coppie di angoli alterni esterni eguali.

Gli angoli alterni esterni sono eguali agli angoli alterni interni perché opposti al vertice, perciò si ricade nel teorema precedente.



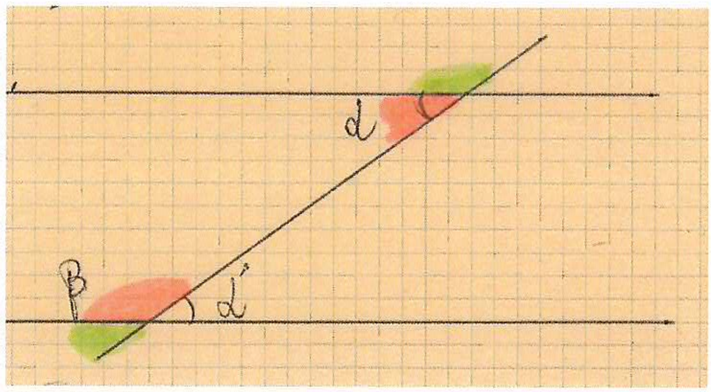
Corollario 2: Due rette di un piano sono parallele se, tagliate da una trasversale, formano coppie di angoli corrispondenti eguali.

Anche in questo caso si ricade nel teorema precedente. Infatti se si valutano gli angoli corrispondenti α e α', si vede che gli angoli $\alpha' = \alpha''$ che è alterno interno con l'angolo α.



Corollario 3: Due rette di un piano sono parallele se, tagliate da una trasversale, formano coppie di angoli coniugati supplementari.

Si valutino gli angoli coniugati interni α e β supplementari per definizione.
L'angolo β però è anche supplementare di α'.
Perciò gli angoli α e α' sono eguali perché supplementari dello stesso angolo.
α e α' sono però angoli alterni interni e le rette sono perciò parallele per il teorema precedente.



<u>Postulato di Euclide.</u>

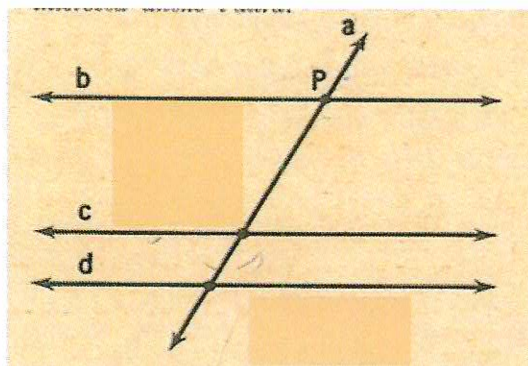
<u>Per un punto fuori di una retta si può condurre una e una sola retta parallela a essa.</u>

Da questo postulato seguono diversi teoremi.

Teorema 1. Date due rette secanti, una di esse seca tutte le parallele all'altra.

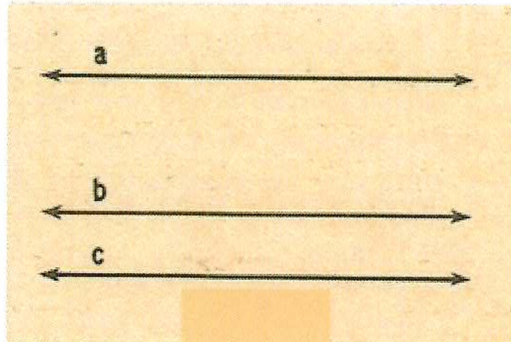
Ipotesi: b//c//d; a $\cap$ b
Tesi: a $\cap$ c e d

Dimostrazione. Si procede per assurdo, si sostiene cioè che a non interseca né c, né d; dunque a //c e d.
Per il punto P passerebbe allora più di una parallela a c e a d; ma questo è contro il postulato di Euclide.
Se ne conclude che a $\cap$ c e d. C.v.d.



Teorema 2. Due rette parallele a una terza sono parallele tra loro.

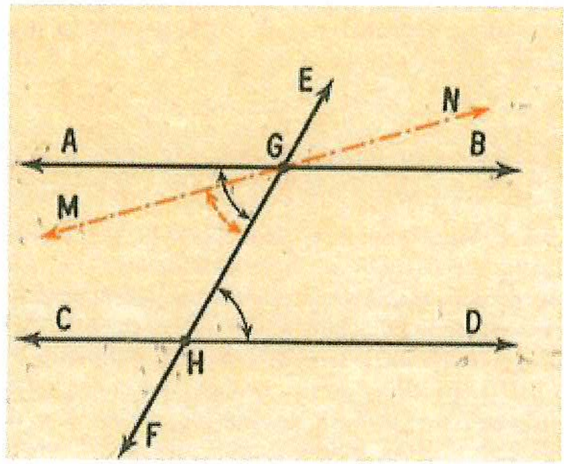
Ipotesi: a//b; a//c.   **Tesi:** b//c



Dimostrazione. Si procede per assurdo e si sostiene che b ∩ c.
Se b ∩ c, dal punto P della loro intersezione passerebbero due rette, b e c, parallele ad a; ma questo è contro il postulato di Euclide.
Se ne conclude che b//c.   C.v.d.

Teorema 3: Se due rette di un piano sono parallele esse, tagliate da una trasversale, formano coppie di angoli alterni interni eguali.

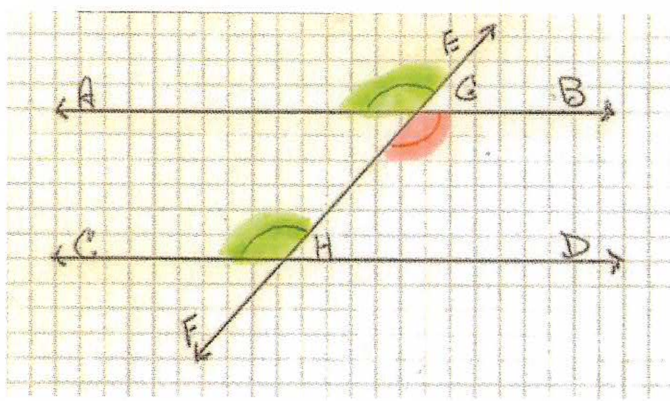
Ipotesi: AB//CD.   **Tesi:** $\widehat{AGH}=\widehat{GHD}$



Dimostrazione. Si ragiona per assurdo e si sostiene che $\widehat{AGH}\neq\widehat{GHD}$. Ad esempio potrebbe essere $\widehat{AGH}>\widehat{GHD}$.
Se così fosse per G dovrebbe passare una retta tale che $\widehat{GHD}=\widehat{MGH}$.
Su questa base si è costretti a riconoscere alla retta MN il parallelismo con CD, per il teorema che sostiene che due rette sono parallele se una secante determina angoli alterni interni eguali.
Per G passerebbero dunque due rette entrambe parallele a CD; ma questo è contro il postulato di Euclide.
Se ne conclude che $\widehat{AGH}=\widehat{GHD}$. C.v.d.

Corollario 1. Se due rette di un piano sono parallele esse, tagliate da una trasversale, formano coppie di angoli corrispondenti eguali.

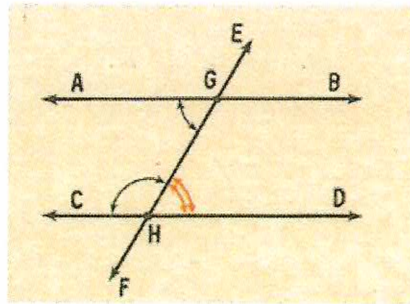
Ipotesi: AB//CD.   **Tesi:** AGE=CHG



Dimostrazione.

Per il teorema precedente $\widehat{CHG}=\widehat{HGB}$. Ma $\widehat{HGB}=\widehat{AGE}$ perché opposti al vertice.
Per la proprietà transitiva anche $\widehat{AGE}=\widehat{CHG}$. C.v.d.

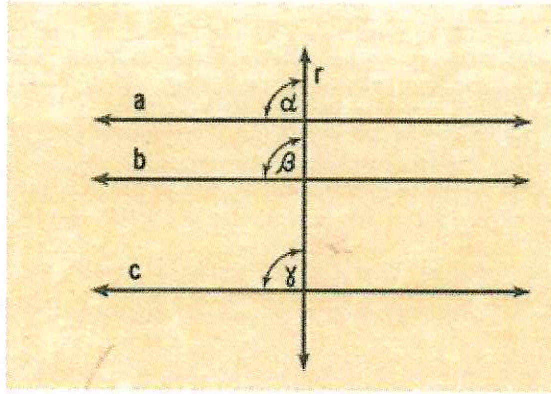
Corollario 2. Se due rette di un piano sono parallele esse, tagliate da una trasversale, formano coppie di angoli coniugati supplementari.



Ipotesi: AB//CD. **Tesi:** $\widehat{AGH}+\widehat{CHG}=180°$

Dimostrazione.
Per il teorema precedente $\widehat{AGH}=\widehat{GHD}$.
$\widehat{GHD}$ però è supplementare a $\widehat{CHG}$ perché adiacente.
Per la proprietà transitiva, anche $\widehat{AGH}$ è supplementare a $\widehat{CHG}$. C.v.d.

Teorema 4. Se due rette sono perpendicolari, tutte le parallele a una di esse sono perpendicolari all'altra.



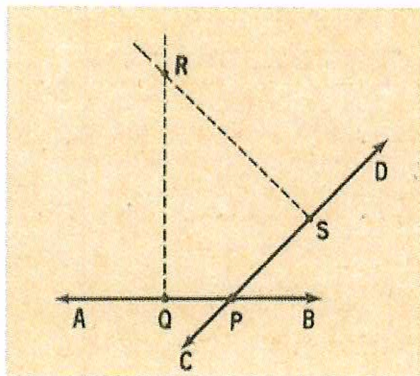
Ipotesi: $r \perp a$; a // b //c. **Tesi:** $r \perp b$; $r \perp c$.

Dimostrazione: α e β sono angoli corrispondenti, perciò eguali. Se eguali, poiché $\hat{\alpha} = 90°$, anche $\hat{\beta}=90°$.
Quindi $r\perp b$. Per la stessa ragione $r \perp c$.

C.v.d.

Teorema 5: In un piano se due rette s'incontrano, s'incontrano anche le loro perpendicolari.

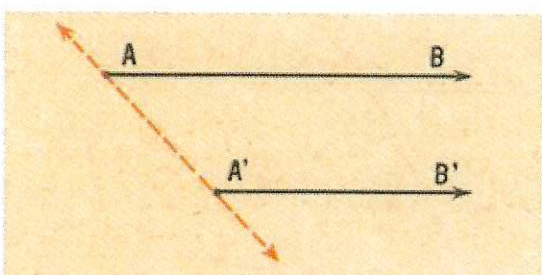
Ipotesi: $AB \cap CD$; $RS \perp CD$; $RQ \perp AB$. **Tesi:** $RS \cap RQ$ in R.

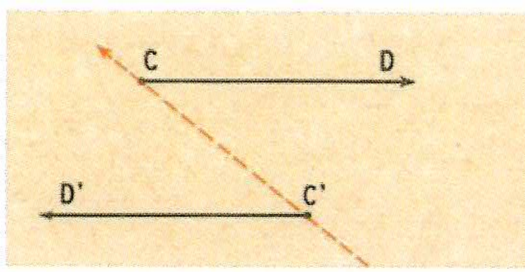


Dimostrazione. Si ragiona per assurdo.

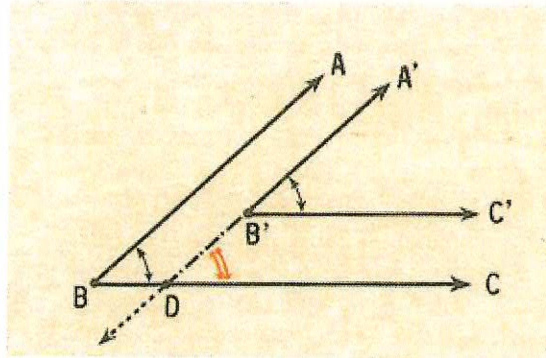
Se RS E RQ non s'incontrano, ne consegue che sono parallele.
Poiché $RS\perp CD$, anche $RQ\perp CD$ per il teorema precedente.
Dallo stesso punto R dunque passerebbero due rette perpendicolari alla retta CD.
Si sa però che per un punto di un piano si può condurre una e una sola perpendicolare a una retta del piano.
Di conseguenza si deve ritenere che $RS \cap RQ$ in R. C.v.d.

Definizione: due rette si dicono **concordi o dello stesso verso** se la retta che unisce le loro origini le lascia dalla stessa parte; altrimenti le due semirette si **dicono discordi o diverso contrario.**





Teorema. Due angoli con lati paralleli e concordi sono eguali.

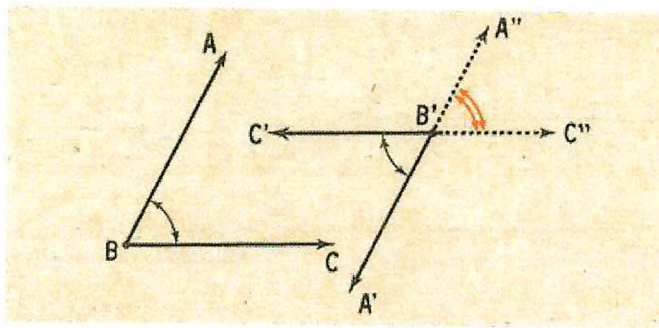


Ipotesi: AB// e concorde A'B'; BC// e concorde B'C'.

Tesi: $\widehat{ABC}=\widehat{A'B'C'}$

Dimostrazione.
- Si prolunghi il lato A'B' fino a incontrare BC in D.
- $\widehat{ABC}=\widehat{A'DC}$ perché angoli corrispondenti delle parallele AB e A'D secate dalla trasversale BC.
- Anche $\widehat{A'B'C'}=\widehat{A'DC}$ perché angoli corrispondenti delle parallele B'C' e BC secate dalla trasversale A'D.
- Ne consegue che per la proprietà transitiva anche $\widehat{ABC}=\widehat{A'B'C'}$. C.v.d.

Corollario 1: Due angoli con i lati paralleli e discordi sono eguali.

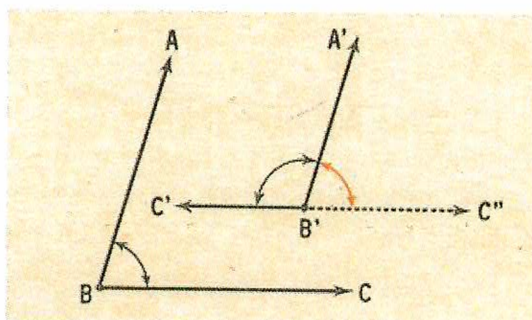


Ipotesi:
AB// e discorde A'B'; BC// e discorde B'C'.

Tesi: $\widehat{ABC}=\widehat{A'B'C'}$

Dimostrazione.
I prolungamenti di C'B' e di A'B' ci offrono un angolo $\widehat{A''B'C''}$ = $\widehat{C'B'A}$ perché suo opposto al vertice. Il nuovo angolo con lati paralleli, é eguale all'angolo ABC per il teorema precedente.
Per la proprietà transitiva anche $\widehat{ABC}=\widehat{A'B'C'}$. C.v.d.

Corollario 2: Due angoli con due lati paralleli e concordi e gli altri due lati paralleli e discordi sono supplementari.



Ipotesi: BA// e concorde con B'A'; BC// e discorde con B'C'.

Tesi: $\widehat{ABC}+\widehat{A'B'C'} = 180°$

Dimostrazione:
- Prolungando C'B', si ottiene l'angolo A'B'C'' che è parallelo e concorde con $\widehat{ABC}$ e, per il teorema precedente, eguale; inoltre A'B'C'' è supplementare con A'B'C' perché adiacente.
- Per la proprietà transitiva perciò anche $\widehat{ABC}+\widehat{A'B'C'} = 180°$. C.v.d.

1) Dato un triangolo qualunque ABC e la bisettrice AS di uno dei suoi angoli, condurre una retta perpendicolare alla bisettrice che seca i lati AB e AC rispettivamente nei punti D ed E. dimostrare che il triangolo AED è isoscele.

2) Dato un triangolo qualunque ABC, condurre dai vertici B e C le perpendicolrai BD e CE a una retta qualunque passante per il vertice A ed esterna al triangolo. Dimostrare che le congiungenti il punto medio M del lato BC con D ed E sono eguali. (Si suggerisce di tracciare per M una parallela alla DE...).

3) Sia ABC un triangolo scaleno con AC>AB e sia AM la mediana relativa al lato BC. Si prolunghi poi la mediana di un segmento eguale ad AM. Dimostrare che l'angolo MAC è minore di MAB e che le rette passanti rispettivamente da BD e CD sono parallele ad AC e AB.

4) Sui lati di un triangolo equilatero ABC si stacchino i segmenti eguali AD, BE, CF e si congiungano i punti D, E, F. Dimostrare che il triangolo DEF ottenuto è pur esso equilatero.

5) Dimostrare che, se la bisettrice di un angolo esterno di un triangolo è parallela a un lato, il triangolo è isoscele e ha per base questo lato.

6) Dimostrare che le bisettrici di due angoli alterni interni di due rette parallele tagliate da una trasversale, sono parallele.

7) Dato un angolo ABC e tracciata la sua bisettrice BS, si conduca la perpendicolare DB alla bisettrice BS. Dimostrare che BD è la bisettrice dell'angolo adiacente del dato.