GEOMETRIA RAZIONALE

Enti geometrici fondamentali,

introdotti come intuitivi, senza definizione, nella geometria euclidea: **punto, retta, piano.**

Proviamo comunque a darne una definizione sommaria:

Punto: è ciò che non ha parti, l'ente che, pur essendo reale, non ha dimensioni. E' indicato con le lettere maiuscole dell'alfabeto latino (A, B, C...).

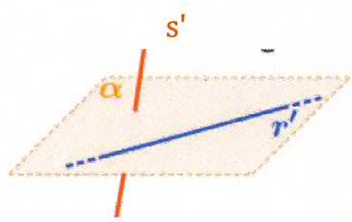
. A

Retta: costituita da un numero *infinito* (postulato) di punti, è una linea posizionata su un piano, che non cambia mai direzione e che non ha né un inizio né una fine. Possiede una sola dimensione che è la lunghezza. E' indicata con le lettere minuscole dell'alfabeto latino (a, b, c...).

Due rette nello spazio possono essere:

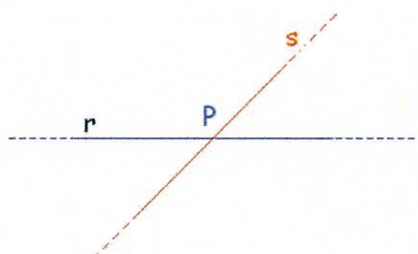
Complanari, se esiste un piano che le contiene entrambe.

Sghembe, se non sono contenute da un piano comune.

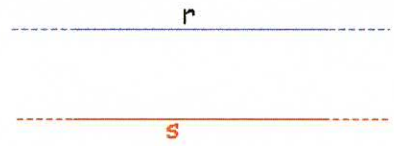


Due rette complanari possono essere:

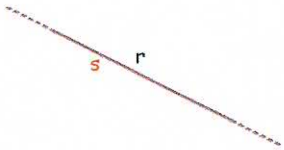
Incidenti, se hanno un unico punto in comune;



Parallele, se non si intersecano mantenendo sempre la stessa distanza tra di loro;



Coincidenti, se hanno tutti i punti in comune.

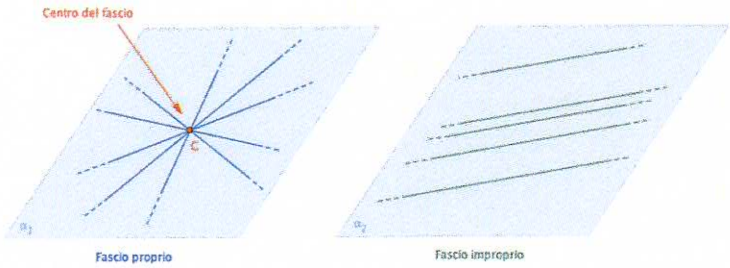


Piano: è un insieme continuo e *infinito* (postulato) di rette, privo di spessore, con due sole dimensioni, lunghezza e larghezza. Per indicarlo si usano le lettere minuscole dell'alfabeto greco (α, β, δ...).

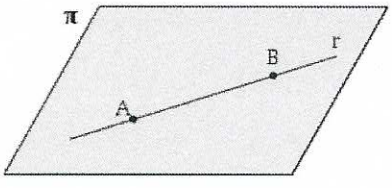
Postulati:

(Il *postulato* o genericamente *assioma*, è un'asserzione geometrica (se fosse *principio*, fisica) di cui si ammette la validità senza fornire una dimostrazione. I postulati sono assunti come veri e su di essi si fonda e si sviluppa tutta la teoria successiva fatta di teoremi, corollari e lemmi. Questi ultimi, infatti, per essere dimostrati si rifanno ad altri teoremi, corollari e lemmi precedenti; visto però che non si può risalire all'infinito a ritroso, è necessario che alcuni concetti iniziali siano assunti come veri senza essere dimostrati, e sono i postulati appunto).

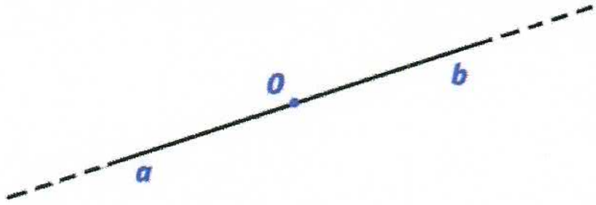
1) Per un punto di un piano passano infinite rette dello stesso piano che costituiscono un **fascio di rette**; il punto è il **centro del fascio** e il fascio di rette è definito **proprio. E' improprio** il fascio le cui rette sono tutte parallele tra loro.



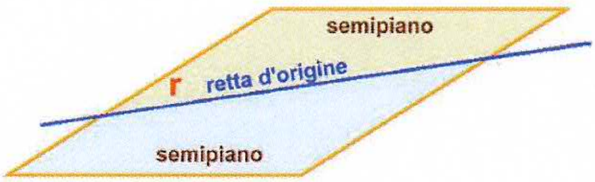
2) Per due punti di un piano passa una e una solo retta che appartiene al piano.



3) Ogni retta è divisa da un suo punto in due semirette opposte o adiacenti di cui quel punto (comune a entrambe) è definito origine delle semirette.

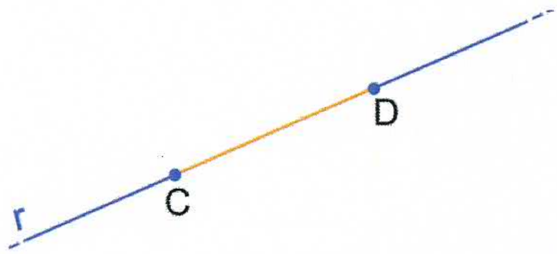


4) Ogni piano è diviso da una sua retta in due semipiani opposti o adiacenti di cui quella retta (comune a entrambi) è definita origine dei semipiani.

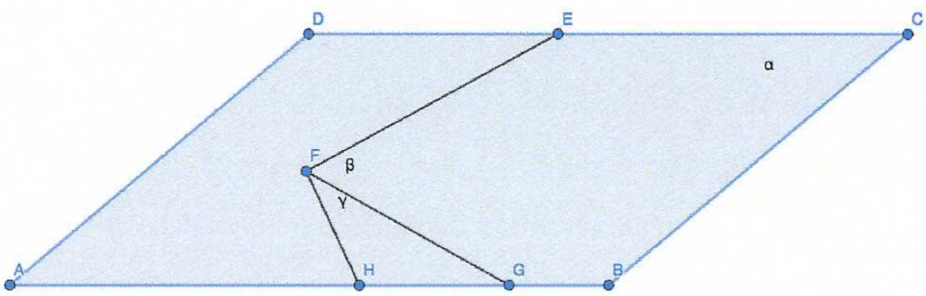


Definizioni:

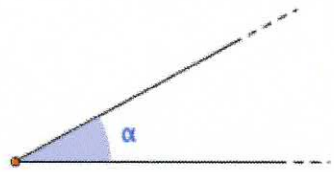
1) Due punti su una retta definiscono un **segmento** di cui gli stessi punti fanno parte.



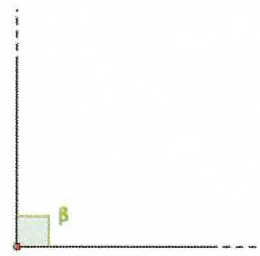
2) Due semirette con la stessa origine (vertice) dividono un piano in due parti, dette semipiani, che, con le semirette comprese, sono definite **angoli**. L'angolo, poiché è una parte di piano, è indicato con le lettere greche minuscole, oppure, se s'incorre nel rischio di generare confusione, con le lettere di tre punti (evidentemente maiuscole), una posta all'origine (vertice), le altre due su due punti delle due semirette presi a caso o secondo la maggiore comodità del momento.



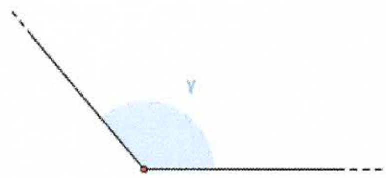
a) angolo **acuto** < 90°



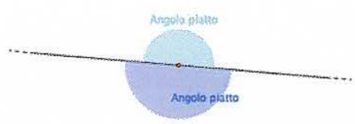
b) angolo **retto** = 90°



c) angolo **ottuso** > 90°



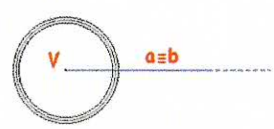
d) angolo **piatto** = 180°



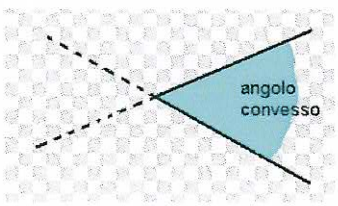
e) angolo **giro** = 360°

f) angolo **nullo** = 0

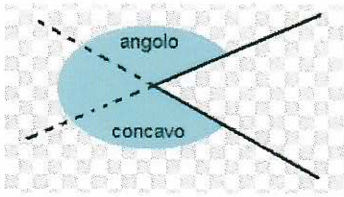
Quando le semirette che definiscono un angolo sono coincidenti.



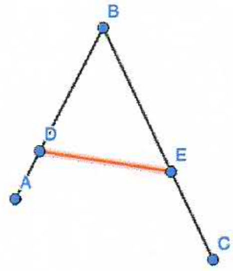
g) un angolo è **convesso (<180°)** quando non contiene al suo interno il prolungamento dei suoi lati;



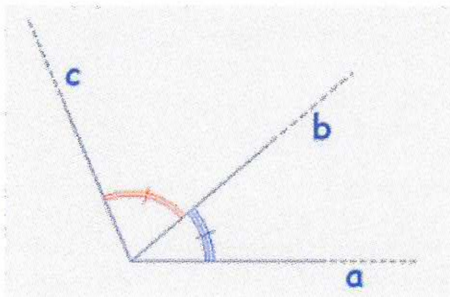
h) Un angolo è **concavo (>180°)** quando contiene al suo interno il prolungamento dei suoi lati.



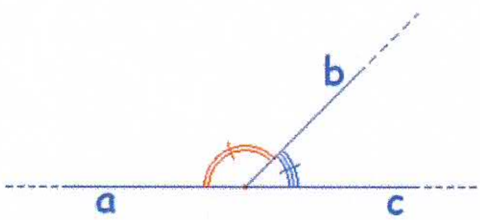
i) E' **corda di un angolo** il segmento che ha i suoi estremi uno in un punto di un lato e l'altro in un punto dell'altro lato dell'angolo stesso.



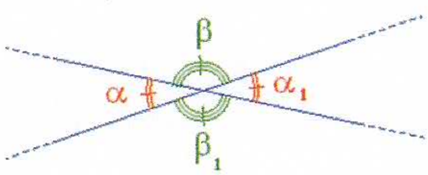
l) Due **angoli** si dicono **consecutivi** quando hanno il vertice e un lato in comune, mentre gli altri due lati si trovano a bande opposte rispetto al lato comune.



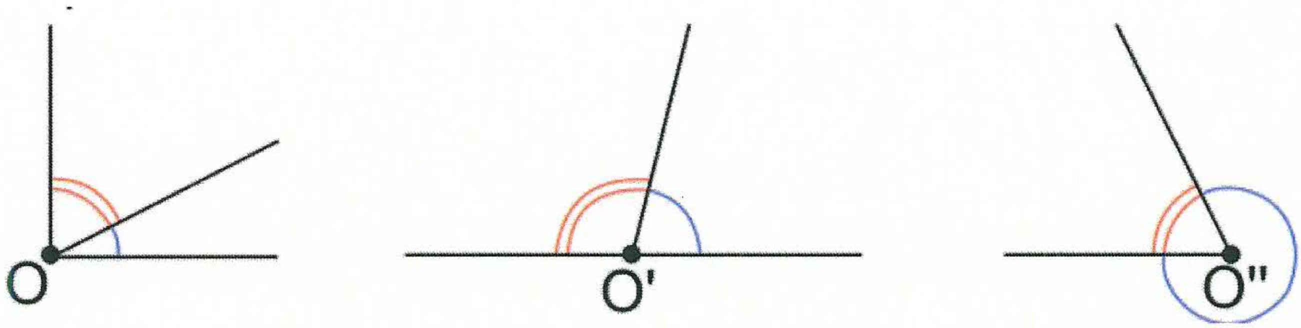
m) Due **angoli** si dicono **adiacenti** se sono consecutivi e hanno adiacenti i lati non coincidenti.



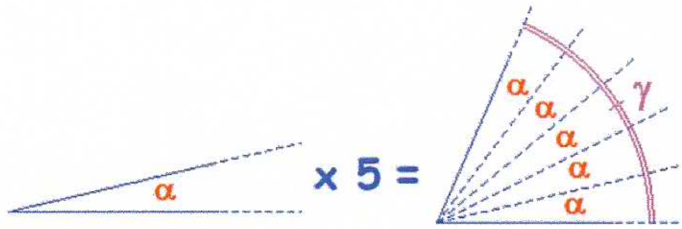
n) Due **angoli opposti al vertice** sono due angoli che hanno il vertice in comune e i lati disposti su due rette incidenti del piano; o semplicemente quando i lati dell'uno sono i prolungamenti dei lati dell'altro.



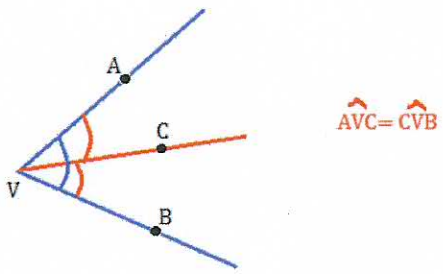
o) Due angoli si dicono rispettivamente complementari, supplementari, explementari, se la loro somma è di 90°, 180°, 360°.



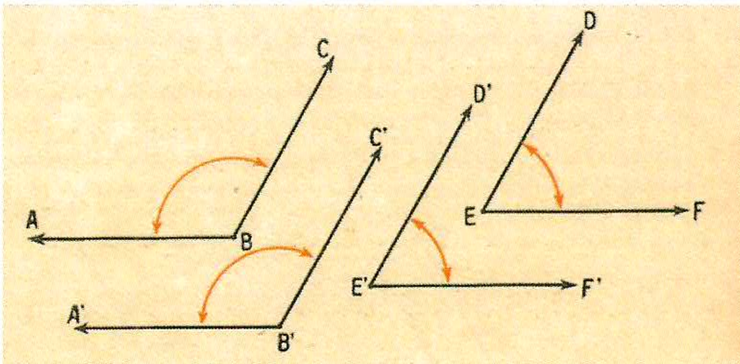
p) Si dice multiplo di un angolo, la somma di angoli eguali all'angolo dato.



q) La bisettrice di un angolo è la semiretta, con origine nel vertice dell'angolo, che divide l'angolo in due parti eguali.



TEOREMA 1: *Angoli supplementari (complementari, explementari) di angoli eguali, sono eguali.*



Ipotesi:

$\widehat{DEF} = \widehat{D'E'F'}$ (1)
$\widehat{ABC} + \widehat{DEF} = 180°$ (2)
$\widehat{A'B'C'} + \widehat{D'E'F'} = 180°$ (3)

Tesi: $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$

Dimostrazione: Si sottragga alla (2), la (3).

$$\widehat{ABC} + \widehat{DEF} = 180°$$

$$\widehat{A'B'C'} + \widehat{D'E'F'} = 180°$$

$$\widehat{ABC} - \widehat{A'B'C'} + 0 \text{ (per la (1)} = 0$$

Ma se $\widehat{ABC} - \widehat{A'B'C'} = 0$, ciò significa che i due angoli sono eguali. C.v.d.

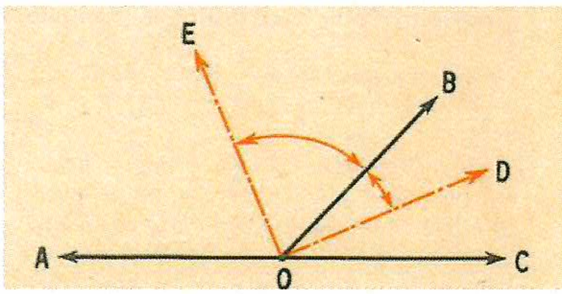
TEOREMA 2*: Le bisettrici di due angoli adiacenti (explementari) sono perpendicolari (adiacenti), formano cioè un angolo retto (piatto).*

Ipotesi:

$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 180°$ (1)
$\widehat{AOE} = \widehat{EOB}$ (2)

$\widehat{BOD} = \widehat{DOC}$ (3)

Tesi: $\widehat{EOD} = 90°$



Dimostrazione:

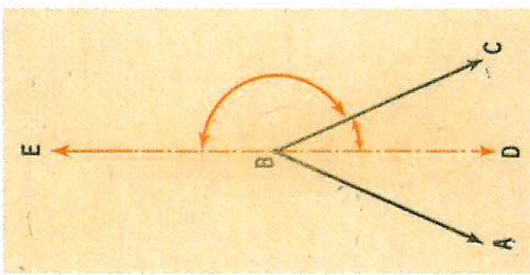
$\widehat{EOB} = ½\ \widehat{AOB}$ per la (2)

$\widehat{BOD} = ½\ \widehat{BOC}$ per la (3)

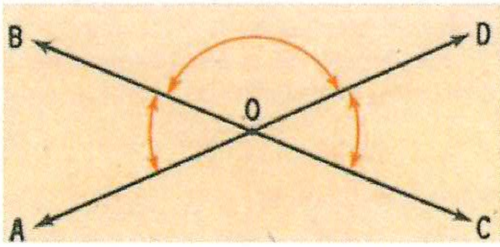
$\widehat{EOB} + \widehat{BOD} = ½\ (\widehat{AOB} + \widehat{BOC})$

$\widehat{EOB} + \widehat{BOD} = ½\ (180°)$ per la (1)

$\widehat{EOD} = 90°$ C.v.d.



Teorema 3: *Due angoli opposti al vertice sono eguali.*



Ipotesi: $\widehat{BOA}$ opposto al vertice di $\widehat{COD}$

Tesi: $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$

Dimostrazione:

$\widehat{AOB}$ e $\widehat{COD}$ sono entrambi adiacenti a $\widehat{BOD}$. Perciò:

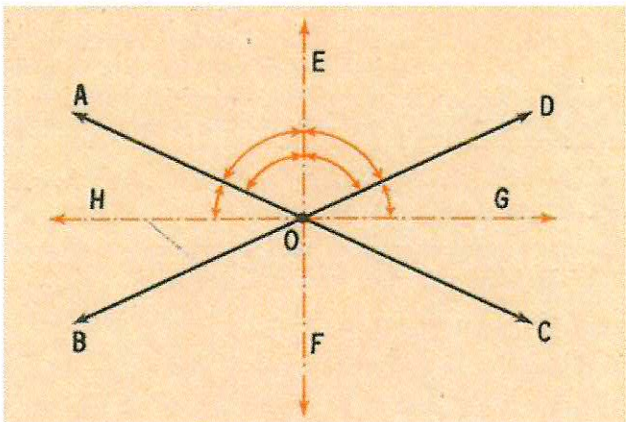
$\widehat{AOB} + \widehat{BOD} = 180°$
$\widehat{COD} + \widehat{BOD} = 180°$ Sottraendo membro a membro

---

$\widehat{AOB} - \widehat{COD} + 0 = 0$ Se la differenza tra i due angoli è eguale a 0, $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$. C.v.d.

Teorema 4: *Le bisettrici di due angoli opposti al vertice sono semirette opposte o adiacenti; inoltre le due rette determinate dalle bisettrici delle due coppie degli angoli opposti sono perpendicolari.*

Ipotesi: $\widehat{BOA}$ opposto al vertice di $\widehat{COD}$ (1)
$\widehat{HOA} = \widehat{HOB}$ (2)
$\widehat{GOC} = \widehat{GOD}$ (3)
$\widehat{AOE} = \widehat{EOD}$ (4)
$\widehat{BOF} = \widehat{FOC}$ (5)



Tesi: a) $\widehat{HOG} = 180°$;

b) HG $\perp$ EF

Dimostrazione:

a)
$\widehat{HOA} = \widehat{HOB}$ per la (2)

$\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$ per la (1)

$\widehat{GOD} = \widehat{GOC}$ per la (3)   Si somma membro a membro.

$\widehat{HOA}+\widehat{AOD}+\widehat{GOD} = \widehat{HOB}+\widehat{BOC}+\widehat{GOC}$ >> $\widehat{HOG} = \widehat{GOH} = 180°$ >> Le semirette OH E OG sono adiacenti.

Analogamente $\widehat{EOF} = \widehat{FOE} = 180°$ e le bisettrici OE e OF sono adiacenti.
C.v.d.

b)
$\widehat{BOF} = \widehat{AOE}$ perché $\widehat{BOF}=\widehat{FOC}$ (per ipotesi) = $\widehat{AOE}$ (perché opposti al vertice)
Perciò:
$(\widehat{BOF} + \widehat{HOB}) + (\widehat{AOE} + \widehat{HOA}) = 180°$
$\widehat{HOF} + \widehat{HOE} = 180°$ Però la somma di angoli eguali dà angoli eguali >> $\widehat{HOF} = \widehat{HOE}$
Se sono eguali e la somma è 180°, entrambi sono di 90° e perciò HG $\perp$ EF