GRANDEZZE E MISURA DI GRANDEZZE

PROPORZIONALITA'

Definizioni

Sono **grandezze geometriche** archi, segmenti, triangoli, parallelogrammi... e si indicano generalmente con una lettera maiuscola, A, B, C...

Sono **grandezze omogenee** quelle che si possono confrontare come, ad esempio, gli angoli o i triangoli o i cerchi.

Sono **grandezze eterogenee** quelle che non si possono confrontare, ad esempio, un angolo e un parallelogrammo.

Una grandezza A è **sottomultipla** della grandezza B quando moltiplicata per un numero intero dà B (il segmento A di cm 3 è summultipla del segmento B di cm 21).

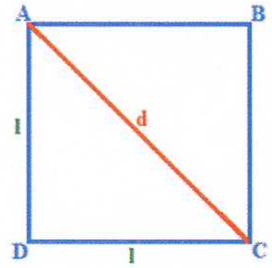
Una grandezza A e **multipla** della grandezza B quando divisa per un numero intero dà B (il segmento B di cm 21 è multipla del segmento A di cm 3).

Due grandezze omogenee sono **commensurabili** quando ammettono un comune sottomultiplo (il segmento A di cm 21 e il segmento B di cm 9 hanno come comune summultipla il segmento C di cm 3).

Due grandezze omogenee sono **incommensurabili** quando non ammettono una comune summultipla.

Teorema. La diagonale e il lato di un quadrato sono grandezze omogenee incommensurabili.

Considerando il triangolo rettangolo ADC per teorema si sa:



$d > l$; $d < 2l$: l quindi non è una summultipla di d.

Potrebbe però esserci una summultipla di d e di l.

- Si ragioni per assurdo e si ammetta una comune summultipla e quindi una frazione irriducibile (che non si può semplificare ulteriormente) tale per cui: $d = \frac{m}{n} l$
- Si elevino al quadrato i due membri: $\mathbf{d^2 = (\frac{m}{n})^2 l^2}$ (1)
- Ricordando anche il teorema di Pitagora si ha anche: $d^2=l^2+l^2$; $\mathbf{d^2=2l^2}$ (2)
- Confrontando la (1) e la (2), si ha $\mathbf{(\frac{m}{n})^2 = 2}$.
- Ma $\frac{m}{n}$ è una frazione irriducibile, quindi l'eguaglianza è impossibile:

diagonale e lato di un quadrato sono grandezze incommensurabili.

N.B.: sull'incommensurabilità al fine di spiegare il significato della frazione $\frac{m}{n}$. Su due lunghezze, ad esempio, di cm 24725 e di cm 230, visto che 230 non è un sottomultiplo di 24725, è necessario trovare una frazione tale che facendo da moltiplicatore a 230, individui un sottomultiplo comune che, in questo caso specifico, è $\frac{1}{2}$. Infatti, $\frac{1}{2}$ x 230 = =115 che è il comune sottomultiplo di 230 (ci sta 2 volte) e di 24725 (ci sta 215 volte).

Si ha **corrispondenza biunivoca** tra due classi di grandezze X e Y se a ogni elemento di X corrisponde *uno e uno solo* elemento di Y e viceversa.

Si definisce **rapporto di due grandezze** omogenee A e B, il numero reale che esprime la misura di A, quando si sceglie B per unità di misura (sostanzialmente: A diviso/fratto B).

Si definisce **rapporto inverso di due grandezze** omogenee, scambiando le due grandezze A e B (sostanzialmente: B diviso/fratto A).

Quattro grandezze A, B, C, D, tutte omogenee o di cui A omogenea a B e C a D, si dicono **in proporzione**, o che formano una proporzione, se il rapporto tra A e B è eguale al rapporto tra C e D (sostanzialmente: A diviso B = C diviso D).

Due classi di grandezze si dicono **inversamente proporzionali** se il rapporto fra due qualunque grandezze della prima classe è eguale al rapporto inverso delle corrispondenti grandezze della seconda classe.

Proprietà delle proporzioni:

- **Invertendo:** scambio dell'antecedente con il conseguente.
  A : B = C : D >>>>> B : A = D : C

- **Permutando:** a condizione che le quattro grandezze siano tutte omogenee, scambio dei termini medi o dei termini estremi.
  A : B = C : D >>>> A : C = B : D oppure D : B = C : A

- **Componendo:** se A : B = C : D
  allora: (A + B) : A = (C + D) : C ma anche (A + B) : B = (C + D) : D

- **Dividendo**: se A : B = C : D con A≥B e C≥D
  allora: (A - B) : A = (C - D) : C

Seconda componendo: se A : B = C : D
allora: (A + C) : (B + D) = C : D ma anche (A + C) : (B + D) = A : B

- **Seconda Dividendo**: se A : B = C : D con A>C e B>D
  allora: (A - C) : (B - D) = C : D ma anche (A - C) : (B - D) = A : B

- **Componendo e dividendo:** se A : B = C : D con A>B; C>D; A>C ; B>D
  allora: (A+B):(A-B)=(C+D):(C-D) ma anche (A+C):(A-C)=(B+D):(B-D)

Teorema dell'unicità della quarta proporzionale. Se tre termini di una proporzione sono eguali ai tre termini di un'altra proporzione, anche il quarto termine della prima dev'essere eguale al quarto termine dell'altra.

Ipotesi: $A:B=C:D$; $A:B=C:D'$ **Tesi:** $D=D'$

Dimostrazione:

- Se $A : B = \alpha$ anche $C : D = \alpha$ e pure $C : D' = \alpha$
- Dalle due ultime si ricava: $C = D\,\alpha$ e $C = D'\,\alpha$
- Ne segue: $D\,\alpha = D'\,\alpha$
- Dividendo membro a membro per α, si ha: $D = D'$. C.v.d.

Criterio/Teorema generale di proporzionalità. Due classi di grandezze in corrispondenza biunivoca sono direttamente proporzionali quando sono soddisfatte le seguenti condizioni:

a) a grandezze eguali della prima classe corrispondono grandezze eguali della seconda;

b) alla somma o alla differenza di grandezze della prima classe corrisponde la somma o la differenza delle grandezze corrispondenti della seconda.

Ipotesi: Nella proporzione $A : B = A' : B'$ $A + B = D$. **Tesi:** $A' + B' = D'$

Dimostrazione

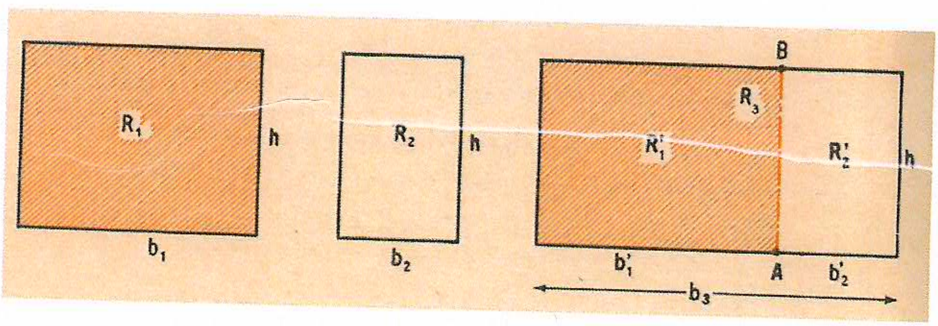
- Da $A : B = A' : B'$ per la proprietà del componendo, si ha: $(A+B):B = (A'+B'):B'$
- Sostituisco D ad A+B: $D:B = (A'+B'):B'$
- Per la proprietà dell'invertendo: $B : D = B' : (A'+B')$
- Confermando la quarta proporzionale a B, D, B', si ha: $B : D = B' : D'$
- Poiché però la quarta proporzionale è unica: $A' + B' = D'$. C.v.d.

Teorema 1. Rettangoli di eguali altezze (o basi) stanno fra loro come le rispettive basi (o altezze).

Ipotesi: $h_1 = h_2$

Tesi: $R_1 : R_2 = b_1 : b_2$

Dimostrazione:



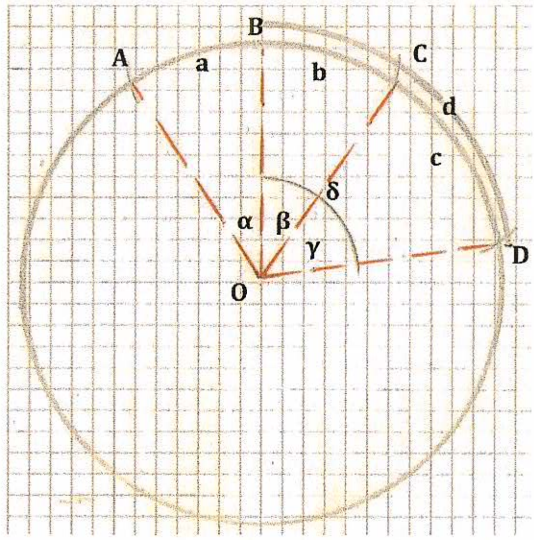
- Prima condizione criterio generale di proporzionalità: se $b_1 = b_2$ anche $R_1 = R_2$ perché entrambe i rettangoli avrebbero la stessa base e la stessa altezza.

- Seconda condizione criterio generale di proporzionalità: se $b_3 = b_1 + b_2$, ci sarà un punto A su b_3 tale per cui condotta per A la perpendicolare a b_3, R_3 è diviso in due rettangoli R_1' e R_2' eguali rispettivamente a R_1 e R_2; e perciò come $b_1 + b_2 = b_3$ così $R_1 + R_2 = R_3$.
- Soddisfatte le condizioni del criterio di proporzionalità, si conclude: $R_1 : R_2 = b_1 : b_2$. C.v.d.

Corollario I. I parallelogrammi di eguale altezza (o base) stanno fra loro come le rispettive basi (o altezze).

Corollario II. Triangoli di eguale base (o altezza) stanno fra loro come le rispettive altezze (o basi).

Teorema 2. Nello stesso cerchio, o in cerchi eguali, due archi (o settori) sono proporzionali ai rispettivi angoli al centro.



Per il criterio generale di proporzionalità ipotesi e tesi devono essere impostate nel modo seguente.

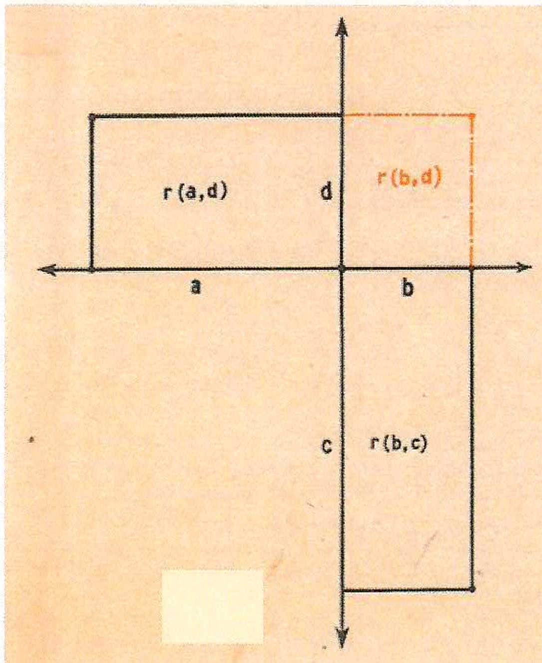
Ipotesi: $a = b$; $b + c = d$ **Tesi:** $\alpha = \beta$; $\beta + \gamma = \delta$

Dimostrazione:

1) Per il teorema che afferma che, nello stesso cerchio o in cerchi eguali, ad angoli al centro eguali corrispondono archi eguali: $\alpha = \beta$.

2) Alla somma degli archi $b + c = d$, corrisponde la rispettiva somma degli angoli al centro $\beta + \gamma = \delta$.

Teorema 3. Se quattro segmenti sono in proporzione, il rettangolo avente per lati i segmenti medi è equivalente al rettangolo avente per lati i segmenti estremi.



Ipotesi: $a : b = c : d$ **Tesi:** $ad \equiv bc$

Dimostrazione:

- Su due rette perpendicolari si costruiscano i due rettangoli r(a,d) e r(b,c) cui si aggiungerà il rettangolo ausiliare r(b,d).
- Per il teorema che dice che rettangoli di eguali altezze (o basi) stanno fra loro come le rispettive basi (o altezze) si può scrivere:

$a : b = r(a,d) : r(b,d)$ (1)
$c : d = r(b,c) : r(b,d)$ (2)

-I primi rapporti della (1) e della (2) sono in proporzione per ipotesi perciò:
$r(a,d) : r(b,d) = r(b,c) : r(b,d)$

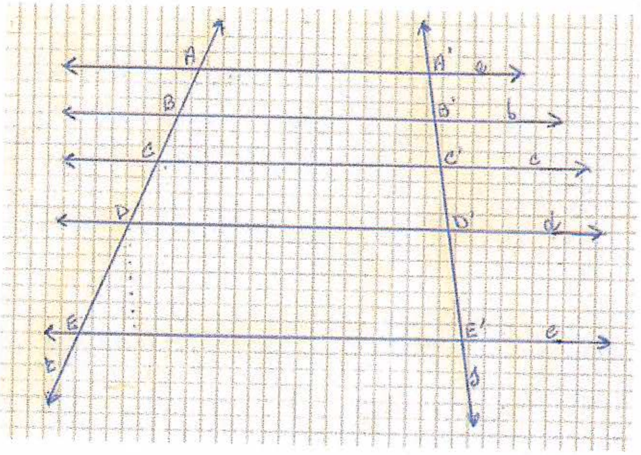
- Nella suddetta proporzione i conseguenti sono eguali, lo sono dunque anche gli antecedenti:

$r(a,d) \equiv r(b,c)$ C.v.d.

Teorema inverso. Se due rettangoli sono equivalenti, i due lati consecutivi del primo sono gli estremi e i due lati consecutivi del secondo sono i medi di una proporzione.

Teorema di Talete 4. Se un fascio di rette parallele è tagliato da due rette trasversali, il rapporto fra i due segmenti deteminati su una trasversale è eguale al rapporto dei segmenti corrispondenti determinati sull'altra tasversale.

Per il criterio generale di proporzionalità ipotesi e tesi devono essere impostate nel modo seguente.



Ipotesi: a//b//c//d//e $\overline{AB}=\overline{BC}$; $\overline{BC}+\overline{CD}=\overline{DE}$

Tesi: $\overline{A'B'}=\overline{B'C'}$; $\overline{B'C'}+\overline{C'D'}=\overline{D'E'}$

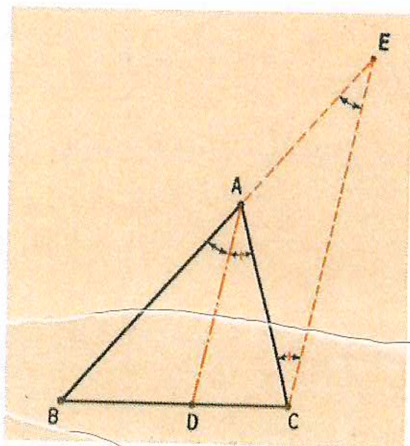
Dimostrazione:

- Per il teorema che dice che in un fascio di rette parallele tagliate da due trasversali, se due segmenti di una trasversale sono eguali, sono anche eguali i segmenti a essi corrispondenti: $\overline{A'B'}=\overline{B'C'}$.
- Per la conseguenza del suddetto teorema che dice che la somma di due segmenti di una trasversale, corrisponde alla somma dei segmenti corrispondenti dell'altra trasversale: $\overline{B'C'}+\overline{C'D'}=\overline{D'E'}$. C.v.d.

Corollario. La parallela a un lato di un triangolo, se interseca gli altri due, li divide in parti proporzionali.

Corollario inverso. Se una retta divide due lati di un triangolo in segmenti proporzionali, la retta è parallela al terzo lato.

Teorema 5. La bisettrice di un angolo di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati.



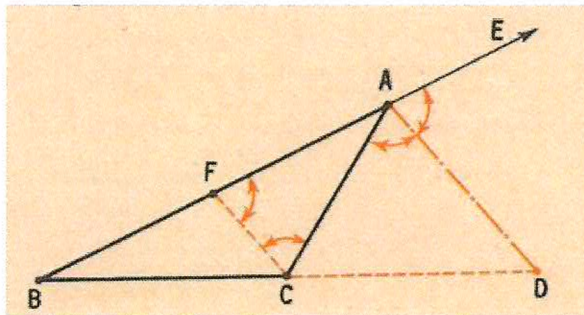
Ipotesi: $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$ **Tesi:** $\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{BA} : \overline{AC}$

Dimostrazione:

- Si prolunghi il lato AB fino a incontrare la parallela ad $\overline{AD}$ passante per C.
- Si considerino gli angoli determinati dalle parallele DA e CE tagliate dalla trasversale AC: $\widehat{DAC}=\widehat{ACE}$ perché alterni interni. (1)
- Si considerino gli angoli determinati dalle parallele DA e CE tagliate dalla trasversale EB: $\widehat{AEC}=\widehat{BAD}$ perché corrispondenti. (2)
- Le due eguaglianze di (1) e (2) hanno in comune gli angoli eguali BAD e DAC perciò si conclude che $\widehat{ACE}=\widehat{AEC}$. Il triangolo CAE è dunque isoscele: $\overline{AE}=\overline{AC}$. (3)
- Si consideri il triangolo BEC dove $\overline{AD}$ è parallela al lato $\overline{EC}$ e divide così per teorema gli altri due lati in segmenti proporzionali: $\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{BA}:\overline{AE}$.
- $\overline{AE}$ però è eguale ad $\overline{AC}$ per la (3), perciò: $\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{BA} : \overline{AC}$. C.v.d.

Teorema 6. La abisettrice di un angolo esterno di un triangolo interseca il prolungamento del lato opposto in un punto le cui distanze dagli estremi di questo lato sono proporzionali agli altri due lati.

Ipotesi: $\widehat{CAD}=\widehat{DAE}$ **Tesi:** $\overline{DB}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}$



Dimostrazione:

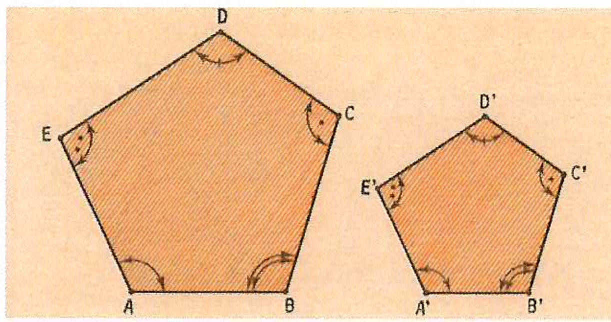
- Si prolunghi il lato BC fino a incontrare la bisettrice di $\widehat{CAE}$ in D. Si conduca poi da C la parallela ad $\overline{AD}$ che incontra $\overline{BA}$ in F.
- Si considerino le parallele CF e AD intersecate da AC: $\mathbf{\widehat{FCA}=\widehat{CAD}}$ perché alterni interni. (1)
- Si considerino le parallele CF e AD intersecate da BE: $\mathbf{\widehat{DAE}=\widehat{AFC}}$ perché corrispondenti.
- Per ipotesi $\widehat{CAD}=\widehat{DAE}$, così dalla (1) e dalla (2) si ha per la proprietà trandsitiva: $\widehat{FCA}=\widehat{AFC}$: il triangolo FCA è isoscele: $\mathbf{\overline{FA}=\overline{AC}}$. (3)
- Considerando il triangolo BAD, FC è parallela ad AD e per teorema divide gli altri due lati in segmenti proporzionali: $\overline{DB}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{FA}$.
- Per la (3) $\overline{FA}=\overline{AC}$; da cui: $\overline{DB}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}$. C.v.d.

DEFINIZIONI

Due poligoni sono simili quando hanno gli angoli ordinatamente eguali e i lati omologhi in proporzione.

$\hat{A}=\hat{A}'$; $\hat{B}=\hat{B}'$; $\hat{C}=\hat{C}'$; $\hat{D}=\hat{D}'$; $\hat{E}=\hat{E}'$

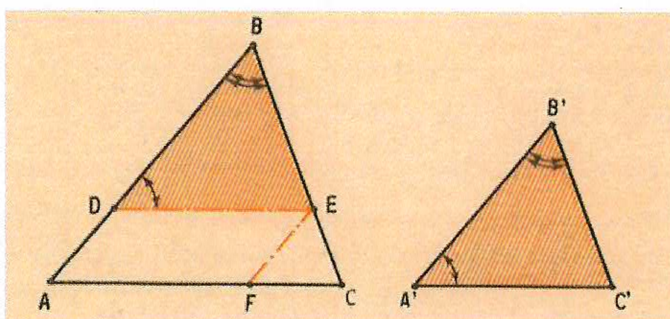
$\overline{AB}:\overline{A'B'}=\overline{BC}:\overline{B'C'}=\overline{CD}:\overline{C'D'}=\overline{DE}:\overline{D'E'}=\overline{EA}:\overline{E'A'}$



Due poligoni regolari con lo stesso numero di lati sono sempre simili.

Primo criterio di similitudine dei triangoli. Due triangoli sono simili se hanno due angoli ordinatamente eguali. ≈

Ipotesi: $\hat{A}=\hat{A}'$; $\hat{B}=\hat{B}'$ **Tesi:** $\widehat{ABC} \approx \widehat{A'B'C'}$

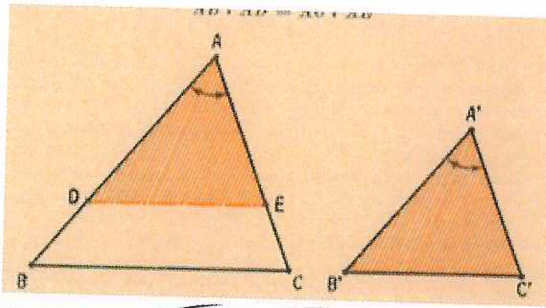


Dimostrazione:

- Scontato il fatto che per differenza di angoli interni di un triangolo anche $\hat{C}=\hat{C}'$, si riporti la lunghezza del lato di un triangolo sul lato dell'altro, in questo caso $\overline{A'B'}$ su $\overline{AB}$ essendo $\overline{AB}>\overline{A'B'}$, definendo il segmento $\overline{BD}=\overline{A'B'}$.
- Da D si tracci la parallela ad $\overline{AC}$.

- $\widehat{BDE}=\widehat{A'B'C'}$ per il secondo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\widehat{B}=\widehat{B'}$ per ipotesi, $\overline{BD}=\overline{A'B'}$ per costruzione, $\widehat{\mathbf{BDE}}=\widehat{\mathbf{B'A'C'}}$ perché entrambi eguali ad $\widehat{A}$, il primo per ipotesi, il secondo perchè angoli corrispondenti delle parallele DE e AC tagliate dalla trasversale AB. (1)
- Per il teorema di Talete applicato ai triangoli, immaginando una seconda parallela ad $\overline{AC}$ passante per B: $\overline{AB}:\overline{BD}=\overline{BC}:\overline{BE}$.
- Per la (1) se si sostituisce: $\overline{AB}:\overline{A'B'}=\overline{BC}:\overline{B'C'}$.
- Si ripete lo stesso procedimento per aggiungere alla proporzionalità anche il terzo lato $\overline{AB}$ con $\overline{A'B'}$. $\widehat{ABC} \approx \widehat{A'B'C'}$ C.v.d.

Secondo criterio di similitudine dei triangoli. Due triangoli sono simili se hanno in proporzione due lati corrispondenti ed eguali gli angoli fra essi compresi.



Ipotesi: $\overline{AB}:\overline{A'B'}=\overline{AC}:\overline{A'C'}$; $\widehat{A}=\widehat{A'}$ **Tesi:** $\widehat{ABC} \approx \widehat{A'B'C'}$

Dimostrazione:

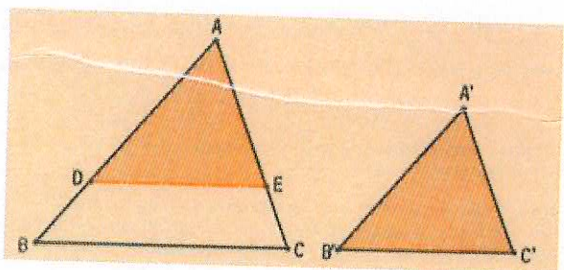
- Con premessa che $\overline{AB}>\overline{A'B'}$ e $\overline{AC}>\overline{A'C'}$ (altrimenti si procede al contrario), si riportino i segmenti $\overline{A'B'}$ su $\overline{AB}$ e $\overline{A'C'}$ su $\overline{AC}$ così che $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$ diventano i segmenti eguali rispettivamente di $\overline{A'B'}$ e a $\overline{A'C'}$.

- Si unisca D a E: DE è parallela a BC per il teorema che dice che se una retta divide in parti proporzionali due lati di un triangolo ($\overline{AB}:\overline{A'B'}=\overline{AC}:\overline{A'C'}$ per ipotesi) , la retta è parallela al terzo lato $\overline{BC}$.

- $\widehat{\mathbf{A'B'C'}}=\widehat{\mathbf{ADE}}$ per il primo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\widehat{A}=\widehat{A'}$ per ipotesi, $\overline{AD}=\overline{A'B'}$ e $\overline{AE}=\overline{A'C'}$ per costruzione. (1)

- $\widehat{ADE}=\widehat{ABC}$ perché angoli corrispondenti delle parallele DE e BC tagliate dalla trasversale AB.
- Per la proprietà transitiva, considerando la (1), $\widehat{B}=\widehat{B'}$; si ricade così nel primo criterio di similitudine dei triagoli con $\widehat{A}=\widehat{A'}$ per ipotesi e $\widehat{B}=\widehat{B'}$ per dimostrazione: $\widehat{ABC} \approx \widehat{A'B'C'}$. C.v.d.

Terzo criterio di similitudine dei triangoli. Due triangoli sono simili se hanno i lati rispettivamente in proporzione.



Ipotesi: $\overline{AB}:\overline{A'B'}=\overline{BC}:\overline{B'C'}=\overline{AC}:\overline{A'C'}$. **Tesi:** $\widehat{ABC} \approx \widehat{A'B'C'}$

Dimostrazione:

- Con premessa che $\overline{AB}>\overline{A'B'}$ e $\overline{AC}>\overline{A'C'}$ (altrimenti si procede al contrario), si riportino i segmenti $\overline{A'B'}$ su $\overline{AB}$ e $\overline{A'C'}$ su $\overline{AC}$ così che $\overline{\mathbf{AD}} = \overline{\mathbf{A'B'}}$, $\overline{\mathbf{AE}} = \overline{\mathbf{A'C'}}$. (1)
- Si unisca D a E: DE è parallela a BC per il teorema che dice che se una retta divide in parti proporzionali due lati di un triangolo (per ipotesi e per la (1)) , la retta è parallela al terzo lato BC.
- $\widehat{ADE}=\widehat{ABC}$ e $\widehat{AED}=\widehat{ACB}$ perché angoli corrispondenti delle parallele DE e BC tagliate prima dalla trasversale AB e poi dalla trasversale AC. Ne consegue: $\widehat{\mathbf{ABC}}\approx\widehat{\mathbf{ADE}}$. (2)

- Per la (2) si verifica la seguente proporzione: $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{BC}:\overline{DE}$

Per la (1) $\overline{AD}$ può essere sostituito da $\overline{A'B'}$. Perciò si ha: $\overline{AB}:\overline{A'B'}=\overline{BC}:\overline{DE}$

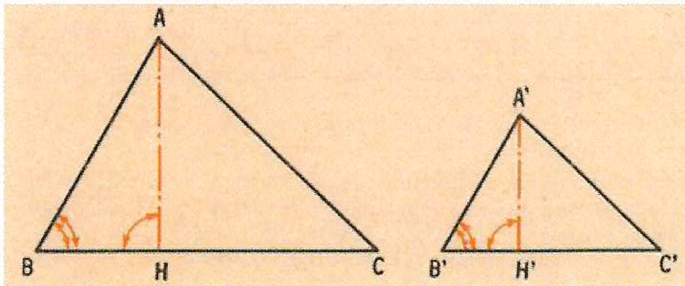
Per ipotesi $\overline{AB}:\overline{A'B'}=\overline{BC}:\overline{B'C'}$

Per l'unicità dell quarta proporzionale: $\overline{DE}=\overline{B'C'}$(3)

- Dunque $\overset{\triangle}{ADE}=\overset{\triangle}{A'B'C'}$ per il terzo criterio d'eguaglianza: $\overline{AD}=\overline{A'B'}$, $\overline{AE}=\overline{A'C'}$ per costruzione; $\overline{DE}=\overline{B'C'}$ per la (3). Ne consegue che per la proprietà transitiva $\overset{\triangle}{ABC} \approx \overset{\triangle}{A'B'C'}$. C.v.d.

Teorema 10. In due triangoli simili le altezze sono proporzionali ai due lati omologhi.

Ipotesi: $\overset{\triangle}{ABC} \approx \overset{\triangle}{A'B'C'}$. **Tesi:** $\overline{AB}:\overline{A'B'}=\overline{AH}=\overline{A'H'}$

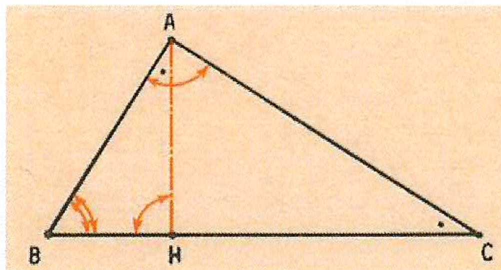


Dimostrazione:

- $\overset{\triangle}{ABH}\approx\overset{\triangle}{A'B'H'}$ per il primo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\widehat{B}=\widehat{B'}$, $\widehat{H}=\widehat{H'}$.
- Sono dunque in proporzione anche i lati, da cui: $\overline{AB}:\overline{A'B'}=\overline{AH}=\overline{A'H'}$. C.v.d.

Teorema 11. Primo teorema di Euclide. In un triangolo rettangolo un cateto e medio proporzionale tra l'ipotenusa e la proiezione dello stesso cateto sull'ipotenusa.

Ipotesi: $\widehat{BAC}=90°$ **Tesi:** $\overline{BC}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{BH}$

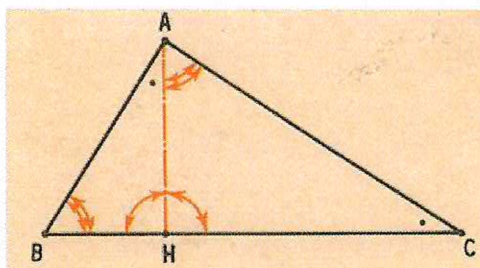


Dimostrazione:

- $\overset{\triangle}{ABC} \approx \overset{\triangle}{ABH}$ per il primo criterio di similitudine tra i triangoli: $\widehat{H}=\widehat{A}=90°$, $\widehat{B}$ in comune.
- Dunque l'ipotenusa dell'uno sta all'ipotenusa dell'altro come il cateto minore dell'uno sta al cateto minre dell'altro: $\overline{BC}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{BH}$. C. v.d.

Teorema 11. Secondo teorema di Euclide. In un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale fra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

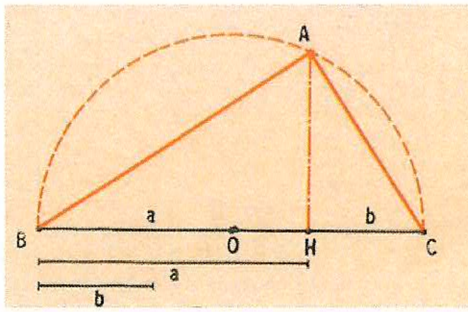
Ipotesi: $\widehat{BAC}=90°$ **Tesi:** $\overline{BH}:\overline{AH}=\overline{AH}:\overline{HC}$



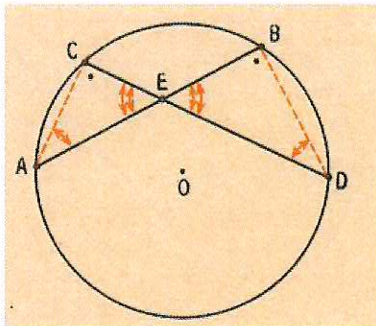
Dimostrazione:

- $\overset{\triangle}{ABH}\approx\overset{\triangle}{AHC}$ per il primo criterio di similitudine dei triangoli: $\widehat{AHB}=\widehat{AHC}=90°$, $\widehat{ABH}=\widehat{HAC}$ perché complementari dello stesso angolo $\widehat{BAH}$.
- Dunque il cateto minore del primo sta al cateto maggiore, come il cateto minore del secondo sta al cateto maggiore: $\overline{BH}:\overline{AH}=\overline{AH}:\overline{HC}$. C.v.d.

Dall'ultimo teorema discende **la costruzione del medio proporzionale.**



Se si hanno due segmenti a e b e si vuole costruire il medio proporzionale, è sufficiente riportare a e b adiacenti su una retta; il punto O sarà il punto medio di $\overline{BC}$ come risultante di a + b.
Con centro O e raggio $\overline{OB}$ si descrive una semicirconferenza con diametro BC.
nel punto d'incontro H, di a e di b si traccia la perpendicolare a $\overline{BC}$ che taglia la circonferenza in A.
Unendo A con B e A con C si ha un triangolo rettangolo dove per il secondo teorema di Euclide $\overline{AH}$ è il medio proporzionale di a e b.



Teorema 12. Se due corde di una circonferenza s'intersecano, le parti di una sono i medi proporzionali delle parti dell'altra.

Tesi: $\overline{AE}:\overline{DE}=\overline{CE}:\overline{BE}$

Dimostrazione:
- $\widehat{ACE} \approx \widehat{BDE}$ per il primo criterio di similitudine dei triangoli: $\widehat{AEC}=\widehat{BED}$ perché opposti al vertice; $\widehat{BAC}=\widehat{CDB}$ percé angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco CB.
- In proporzione dunque i lati: $\overline{AE}:\overline{DE}=\overline{CE}:\overline{BE}$. C.v.d.

Teorema 13. Condotte a una circonferenza da un punto esterno A due secanti, i quattro segmenti che hanno per estremi A da una parte e dall'altra i punti d'intersezione con la circonferenza, formano una proporzione dove i segmenti di una stessa secante sono i medi, i segmenti dell'altra gli estremi.

Tesi: $\overline{AC}:\overline{AE}=\overline{AD}:\overline{AB}$

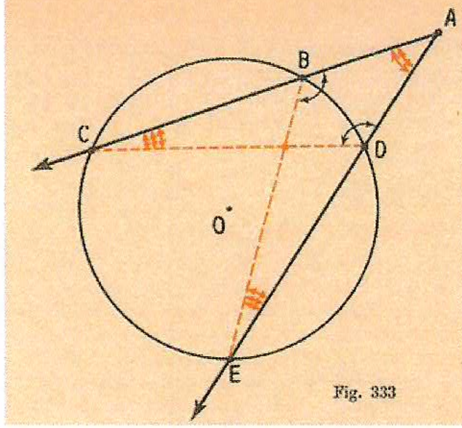


Fig. 333

Dimostrazione:

- si unisca B con E e C con D.
- $\widehat{ACD} \approx \widehat{ABE}$ per il primo criterio di similitudine dei triangoli: $\widehat{A}$ in comune; $\widehat{BCD}=\widehat{BED}$ perchè angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco BD.
- Vale dunque la proporzione: $\overline{AC}:\overline{AE}=\overline{AD}:\overline{AB}$. C.v.d.

Teorema 14. Se da un punto esterno A di una circonferenza si traccia una tangente e una secante alla stessa circonferenza, il segmento di tangenza è medio proporzionale con i segmenti che hanno come estremi A e i due punti d'intersezione.

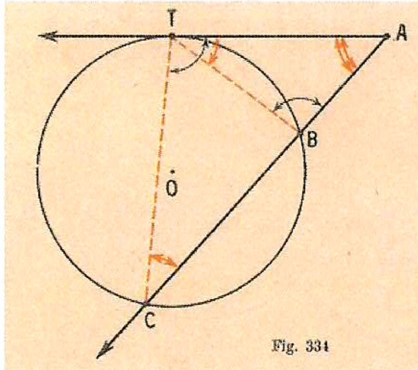
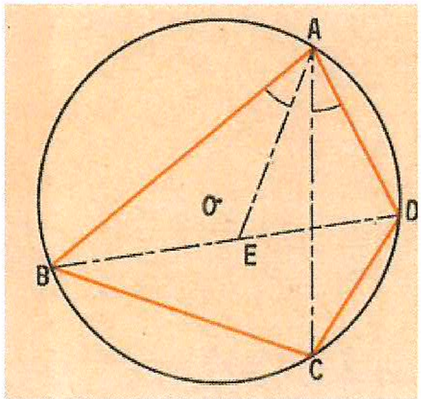


Fig. 334

Tesi: $\overline{AC}:\overline{AT}=\overline{AT}:\overline{AB}$

- Si unisca T con B e T con C.
- $\widehat{ABT} \approx \widehat{ACT}$ per il primo criterio di similitudine dei triangoli: $\widehat{A}$ in comune; $\widehat{BCT}=\widehat{BTA}$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco TB.
- Vale perciò la proporzione: $\overline{AC}:\overline{AT}=\overline{AT}:\overline{AB}$. C.v.d.

Teorema 15. Teorema di Tolomeo. In un quadrilatero inscritto in una circonferenza il rettangolo avente per lati le diagonali del quadrilatero è equivalente alla somma dei due rettangoli ciascuno avente per lati quelli opposti del quadrilatero.

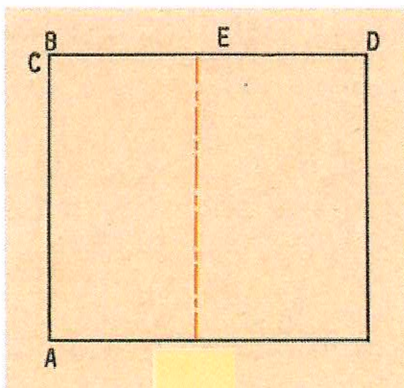


Tesi: r(AC, BD) ≡ r(AD, BC) + r(AB, CD)

Dimostrazione:

- Da A si conduca una secante su BD, nel punto E, tale che $\widehat{BAE}=\widehat{CAD}$.
- $\widehat{ABE} \approx \widehat{ACD}$ per il primo criterio di similitudine dei triangoli: $\widehat{BAE}=\widehat{CAD}$ per costruzione; $\widehat{ABD}=\widehat{ACD}$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AD. $\mathbf{\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BE} : \overline{CD}}$. (1)
- AED ≈ ABC per il primo criterio di similitudine dei triangoli: $\widehat{ADB}=\widehat{ACB}$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo sullo stesso arco AB; $\widehat{BAC}=\widehat{EAD}$ perché somma di angoli eguali. $\mathbf{\overline{AD} : \overline{AC} = \overline{DE} : \overline{BC}}$. (2)
- Per il teorema che dice che se quattro segmenti sono in proporzione, il rettangolo avente per dimensioni i medi è equivalente al rettangolo avente per dimensioni gli estremi, dalla (1) e dalla (2) si ha:

r(AC,BE) ≡ r(AB, CD)
r(AC, DE) ≡ r (AD, BC) e sommando membro a membro
r(AC, BE) + r(AC, DE) ≡ r(AB, CD) + r(AD, BC)



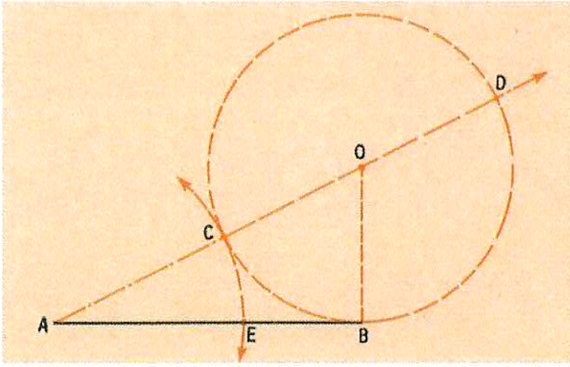
Se si considera il primo membro, troviamo due rettangoli con altezza AC e come base BE + DE = BD. Si potrà scrivere allora:

r(AC, BD) ≡ r(AB, CD) + r(AD, BC). C.v.d.

Teorema 16. SEZIONE AUREA DI UN SEGMENTO

Un segmento può essere sempre diviso in due parti tali che la maggiore (**SEZIONE AUREA**) sia media proporzionale dell'intero segmento e della parte minore.

Come si costruisce.



- Sia AB il segmento, si tracci la perpendicolare a B e si stacchi su di essa un segmento OB =½ $\overline{AB}$.
- Si congiunga O con A.
- Con raggio OB e centro O si tracci una circonferenza che taglia $\overline{AO}$ in C.
- Con raggio AC e centro A si tagli $\overline{AB}$.

<u>$\overline{AE}$ è la parte aurea del segmento AB</u>

Come si dimostra. **Tesi:** $\overline{AB} : \overline{AE} = \overline{AE} : \overline{EB}$

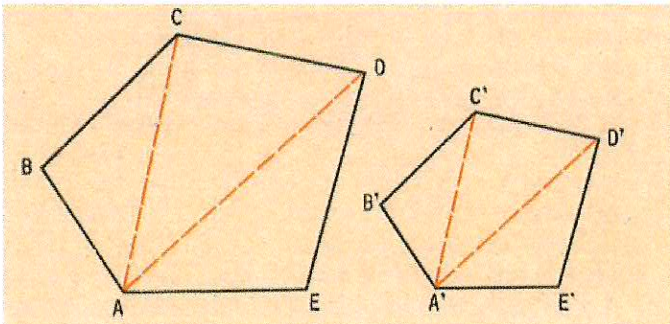
- Per il teorema della tangente e della secante si ha: AD : AB = AB : AC
- Per la proprietà del dividendo: (AD-AB) : AB = (AB-AC) : AC (1)
- **AD-AB** = AD-CD = AC **= AE**
- **AB-AC** = AB-AE **= EB**
- **AC = AE**
- Sostituendo nella (1), si ha: AE:AB = EB:AE che per l'invertendo diventa: **AB:AE = AE:EB**

C. V. D.

Teorema 17. CRITERIO DI SIMILITUDINE DEI POLIGONI

Due poligoni di egual numero di lati sono simili quando hanno tutti gli angoli ordinatamente eguali e i lati ordinatamente in proporzione.
La similitudine non è compromessa se non sono eguali o in proporzione:

1) tre angoli consecutivi (I criterio);
2) due angoli consecutivi **e il lato** compreso (II criterio);
3) due lati consecutivi e l'angolo compreso (III criterio).



Dimostriamo solo il primo criterio perché si procede nello stesso modo anche con gli altri due.

Ipotesi: $\hat{B}=\hat{B}'$; $\hat{C}=\hat{C}'$;

$\overline{AB}:\overline{A'B'}=\overline{BC}:\overline{B'C'}=\overline{CD}:\overline{C'D'}=\overline{DE}:\overline{D'E'}=\overline{EA}:\overline{E'A'}$

Tesi: $\hat{A}=\hat{A}'$; $\hat{D}=\hat{D}'=\hat{E}=\hat{E}'$

Dimostrazione: si procede tracciando tutte le diagonali che partono dallo stesso angolo (in questo caso A) e dimostrando la similitudine dei triangoli partendo da quelli di cui per ipotesi si conoscono le eguaglianze degli angoli e/o la proporzione dei lati.
- $\widehat{ABC}\approx\widehat{A'B'C'}$, per il primo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\hat{B}=\hat{B}'$, $\overline{AB}:\overline{A'B'}=\overline{BC}:\overline{B'C'}$ per ipotesi.

La proporzione perciò comincia a estendersi alla diagonale AB:A'B'= BC:B'C'=**AC:A'C'** mentre gli angoli dei triangoli si dimostrano eguali, per cui, alla fine, somma di angoli eguali ci dà angoli eguali.

- $\widehat{ACD} \approx \widehat{A'C'D'}$ per il primo criterio di similitudine: $\overline{CD}:\overline{C'D'}=\overline{AC}:\overline{A'C'}$ per ipotesi e dimostrazione precedente; $\widehat{ACD}=\widehat{A'C'D'}$ per differenza di angoli eguali. Così $\overline{CD}:\overline{C'D'}=\overline{AD}:\overline{A'D'}$.
- $\widehat{ADE} \approx \widehat{A'D'E'}$ per il terzo criterio di similitudine: $\overline{DE}:\overline{D'E'}=\overline{EA}:\overline{E'A'}=\overline{AD}:\overline{A'D'}$ per ipotesi e per la dimostrazione precedente.

Così $\widehat{E}=\widehat{E'}$ e per somma di angoli eguali $\widehat{A}=\widehat{A'}$; $\widehat{D}=\widehat{D'}$. C.v.d.

Corollario. Due poligoni simili sono divisi dalle diagonali condotte dallo stesso vertice su tutti gli altri vertici, in triangoli ordinatamente simili.

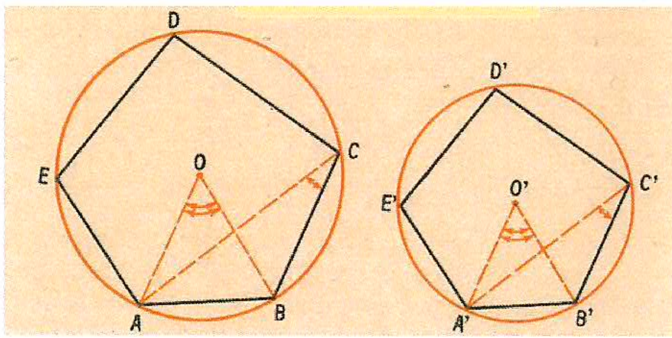
Dai teoremi precedenti si evince che **per costruire un poligono simile a un poligono dato** si deve dividere il dato in triangoli progressivi tracciando tutte le diagonali che partono da un unico vertice e poi il nuovo poligono è costruito in successione su triangoli simili a quelli del poligono dato.

Teorema 18. I perimetri di due poligoni simili sono proporzionali ai due lati omologhi.

Il teorema si dimostra applicando la proprietà del componendo che unisce in somma tutti i lati del primo poligono e i lati omologhi del secondo poligono per porli in proporzione con i lati omologhi dei due poligoni.

Teorema 19. I perimetri di due poligoni simili inscritti o circoscritti a una circonferenza sono proporzionali ai raggi della circonferenza.

Ipotesi: ABCDE ≈ A'B'C'D'E' **Tesi:** p : p' = r : r'



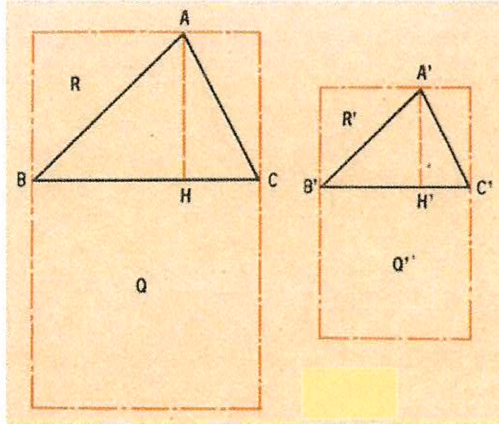
Dimostrazione:

- Si unisca A e B con O; A' e B' con O'.
- Si unisca A con C e A' con C'.
- $\widehat{ABC} \approx \widehat{A'B'C'}$ per il primo criterio di similitudine dei triangoli: tutto per ipotesi. In particolare $\widehat{ACB}=\widehat{A'C'B'}$.
- $\widehat{ACB}$ e il suo omologo $\widehat{A'B'C'}$ insistono rispettivamente su $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ su cui insistono anche gli angoli al centro $\widehat{AOB}$ e $\widehat{A'O'B'}$ che sono il doppio dei primi e dunque eguali. (1)
- $\widehat{AOB} \approx \widehat{A'O'B'}$ per il primo criterio di similitudine dei triangoli: per differenza di angoli eguali, considerando che per la (1) $\widehat{O}=\widehat{O'}$, e gli altri due angoli sono eguali perché i triangoli omologhi sono isosceli.
- Il raggio è dunque in proporzione con il lato: $\overline{AO} : \overline{A'O'} = \overline{AB} : \overline{A'B'}$
- I perimetri di due poligoni simili sono però proporzionali ai due lati omologhi, perciò per la proprietà transitiva: $\overline{AO} : \overline{A'O'}$ = p : p'. C.v.d.

Corollario. I perimetri di due poligoni regolari e dello stesso numero di lati stanno tra loro come i rispettivi raggi e i rispettivi apotemi.

Teorema 20. Due triangoli simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi.

Ipotesi: $\widehat{ABC} \approx \widehat{A'B'C'}$ **Tesi:** $\widehat{ABC} : \widehat{A'B'C'} = BC^2 : B'C'^2$



Dimostrazione:

- Si costruiscano i quadrati Q e Q' con base rispettivamente $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$; poi i rettangoli R e R' con base rispettivamente $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$ e altezza $\overline{AH}$ e $\overline{A'H'}$.
- Per il teorema che dice che rettangoli con eguali basi stanno fra loro come le rispettive altezze:

$$Q : R = \overline{BC} : \overline{AH} \qquad e \qquad Q' : R' = \overline{B'C'} : \overline{A'H'} \quad (1)$$

- per il teorema che dice che in due triangoli simili le altezze sono proporzionali ai due lati omologhi:

$$\overline{BC} : \overline{AH} = \overline{B'C'} : \overline{A'H'} \qquad (2)$$

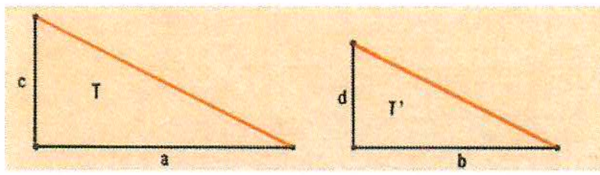
- Applicando la proprietà transitiva su (1) e (2):

$$Q : R = Q' : R'$$

- Si applichi poi la proprietà del permutando: $Q : Q' = R : R'$
- Si dividano poi i secondi termini per due: $Q : Q' = R/2 : R'/2$
- La metà di R e R' corrisponde ai triangoli ABC e A'B'C' >>> $\mathbf{Q : Q' = \widehat{ABC} : \widehat{A'B'C'}}$**.** C.v.d.

Teorema 21. Se quattro segmenti sono in proporzione anche i loro quadrati sono in proporzione.

Ipotesi: $a : b = c : d$ **Tesi:** $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$



Dimostrazione:

- Si costruiscano due triangoli rettangoli T e T' con dimensioni rispettivamente dei cateti a e c, il primo, b e d, il secondo.
- $\widehat{T} \approx \widehat{T'}$ per il secondo criterio di similitudine dei triangoli: per ipotesi e per costruzione.
- Per il teorema che dice che due triangoli simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi:

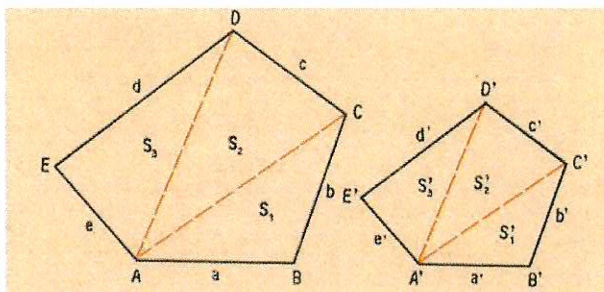
$$\mathbf{T : T' = a^2 : b^2} \qquad \mathbf{e} \qquad \mathbf{T : T' = c^2 : d^2}$$

- Per la proprietà transitiva: $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$. C.v.d.

Teorema 22. Due poligoni simili stanno tra loro come i quadrati di due lati omologhi.

Ipotesi: ABCDE≈A'B'C'D'E'

Tesi: $ABCDE : A'B'C'D'E' = a^2 : a'^2$



Dimostrazione: per i teoremi precedenti si sa che i triangoli in cui sono divisi due poligoni simili dalle loro diagonali, sono simili. Inoltre si sa che triangoli simili stanno tra loro come i quadrati dei loro lati.

$S_1 : S_1' = a^2 : a_1^2$; $S_2 : S_2' = c^2 : c'^2 = a^2 : a_1^2$; $S_3 : S_3' = b^2 : b'^2 = a^2 : a_1^2$

$S_1 : S_1' = S_2 : S_2' = S_3 : S_3' = a^2 : a_1^2$

e componendo gli S con gli S': $ABCDE\,(S) : A'B'C'D'E'\,(S') = a^2 : a'^2$ C.v.d.

Testo