

ESERCIZI

1) Dimostrare che se un quadrato è equivalente a un poligono regolare, il suo lato è medio proporzionale fra il perimetro e la metà dell'apotema del poligono.

Ipotesi: $S_r \equiv S_t \gg S$

Tesi: $P : l = l : \frac{a}{2}$

Dimostrazione:

- Un poligono regolare è inscrittibile in una circonferenza e i segmenti che uniscono il suo centro, che è anche centro della circonferenza, ai suoi vertici sono tutti eguali perché raggi.
- Tanti lati perciò ha il poligono, tanti sono i triangoli eguali (per il terzo criterio d'eguaglianza dei triangoli).
- L'area di un triangolo si ottiene moltiplicando la base per l'altezza e dividendo per due. L'area di tutto il poligono regolare è dunque la somma delle aree dei singoli triangoli:

$$(EF \frac{a}{2}) + (GF \frac{a}{2}) + (GH \frac{a}{2}) + (HI \frac{a}{2}) + (IL \frac{a}{2}) + (LE \frac{a}{2}) = S.$$

- Si metta in evidenza $\frac{a}{2}$, si sommino tutti lati (la somma dà il perimetro del poligono) e si sostituisca a S, $l \times l$, visto che per ipotesi le due figure sono equivalenti:

$$P \frac{a}{2} = l \times l.$$

- In una proporzione il prodotto dei medi é eguale al prodotto degli estremi. Scomponendo perciò i suddetti fattori si ha la proporzione: $P : l = l : \frac{a}{2}$ C.v.d.

2) Dimostrare che se un quadrato è equivalente a un trapezio, il suo lato è medio proporzionale fra l'altezza e la semisomma delle basi.

Ipotesi: $S \equiv S'$.

Tesi: $h : l = l : \frac{b+b'}{2}$

Dimostrazione:

- Si prolunghi $\overline{AD}$ di un segmento $\overline{DE} = \overline{BC}$ e si unisca B con E.

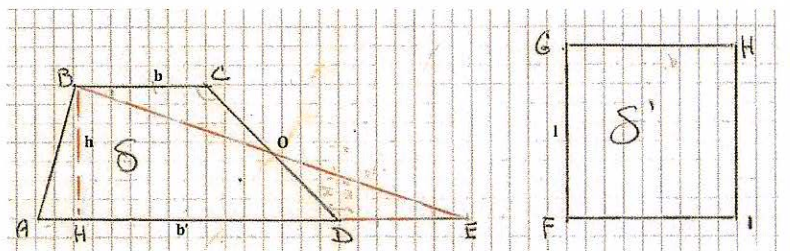
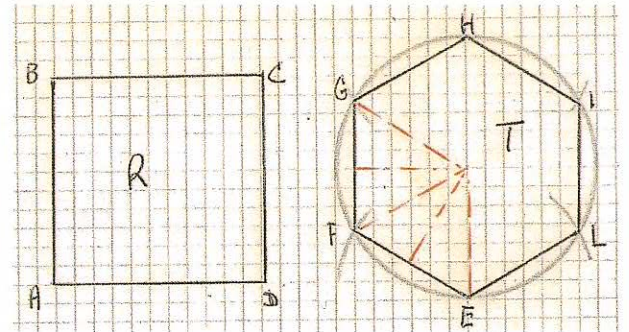
- $\widehat{BCO} = \widehat{ODE}$ per il secondo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\overline{BC} = \overline{DE}$ per costruzione, $\widehat{CBO} = \widehat{OED}$ e $\widehat{BCO} = \widehat{COD}$ perchè alterni interni delle parallele tagliate da BE e CD.

- Dunque $ABE \equiv ABCD \equiv FGHI$ ($l \times l$)

- L'area di un triangolo si ottiene moltiplicando la base per l'altezza e dividendo per due:

$$h \frac{b+b'}{2} = l \times l$$

- In una proporzione il prodotto dei medi é eguale al prodotto degli estremi. Scomponendo perciò i suddetti fattori si ha la proporzione: $h : l = l : \frac{b+b'}{2}$ C.v.d.



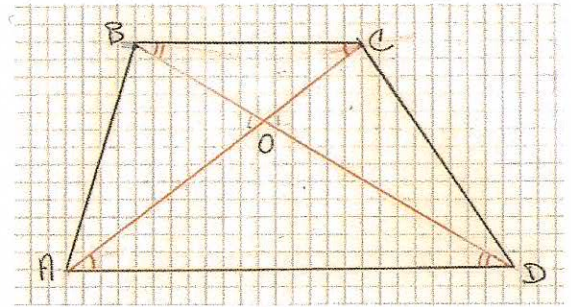
3) Dimostrare che le diagonali di un trapezio si dividono in parti proporzionali fra loro e proporzionali alle basi.

Ipotesi: ABCD >> Trapezio

Tesi: $\overline{AO}:\overline{OC}=\overline{DO}:\overline{OB}=\overline{AD}:\overline{BC}$

Dimostrazione:

- $\widehat{BOC} \approx \widehat{AOD}$ per il primo criterio di similitudine dei triangoli: $\widehat{BOC}=\widehat{AOD}$ perché opposti al vertice; $\widehat{CBD}=\widehat{BDA}$ e $\widehat{BCA}=\widehat{CAD}$ perché alterni interni delle rette BC e AD secate dalle trasversali BD e AC.
- Risulta perciò: $\overline{AO}:\overline{OC}=\overline{DO}:\overline{OB}=\overline{AD}:\overline{BC}$. C.v.d.

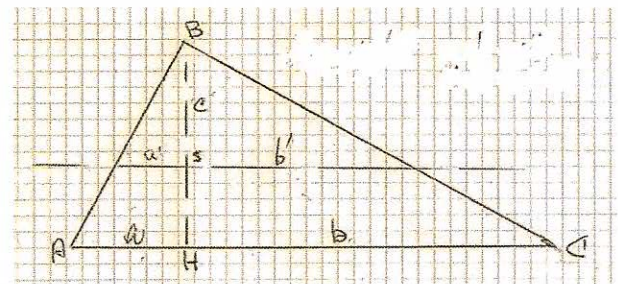


4) Sono dati tre segmenti a, b, c, costruire due segmenti a' e b' tali che si abbia: $a:b=a':b'$ e $a':c=c:b'$.

Ipotesi: sono dati tre segmenti: a, b, c.

Tesi: $a:b=a':b'$ e $a':c=c:b'$.

Dimostrazione:



- Si costruisca un triangolo rettangolo dove a e b siano le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa, poi, tracciata una parallela all'ipotenusa che seca i cateti del triangolo e determina, dentro al triangolo precedente, un secondo triangolo rettangolo che ha la parallela come ipotenusa, a' e b' siano le proiezioni dei cateti del nuovo triangolo rettangolo sull'ipotenusa/parallela e c l'altezza relativa all'ipotenusa del secondo triangolo rettangolo.
- I due triangoli rettangoli sono simili per il primo criterio di similitudine dei triangoli avendo l'angolo retto in comune e i due angoli alla base rispettivamente eguali perché corrispondenti per costruzione. Perciò: $a:b=a':b'$
- Considerato poi il secondo triangolo rettangolo, per il secondo teorema di Euclide: $a':c=c:b'$. C.v.d.

5) Trovare due segmenti conoscendo la loro somma e il segmento medio proporzionale fra uno dei segmenti e la loro somma.

Ipotesi: $\overline{AH} + \overline{HC} = b$; $\overline{AH} : a = a : \overline{AC}(b)$

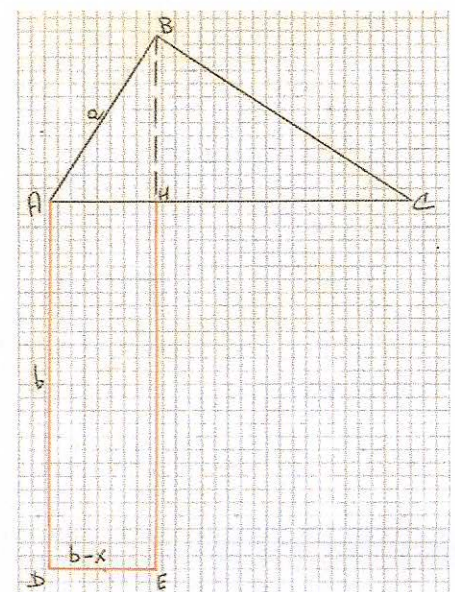
Tesi: AH=? HC=?

Dimostrazione:

- Si costruisca un triangolo rettangolo dove il cateto minore sia a e l'ipotenusa sia b.

Per il primo teorema di Euclide: $\overline{AH} : a = a : \overline{AC}(b)$

- Da cui, ponendo $\overline{AH}=x$: $x : a = a : b$; $bx = a^2$; $x = \frac{a^2}{b}$
- Da cui sottraendo a b $\overline{AH}$ si trova anche $\overline{HC}$.

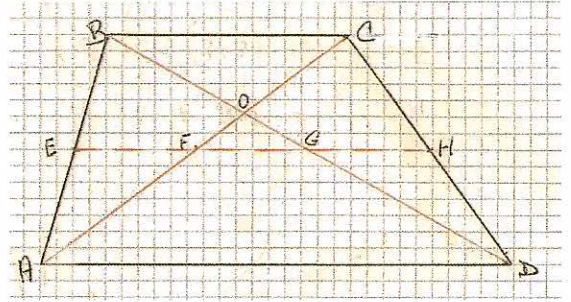


6) Dimostrare che i punti medi dei lati non paralleli di un trapezio e i punti medi delle diagonali sono allineati.

Ipotesi: $\overline{BE}=\overline{EA}$; $\overline{CH}=\overline{HD}$; $\overline{BG}=\overline{GD}$; $\overline{CF}=\overline{FA}$

Tesi: E, F, G, H, punti sulla stessa linea.

Dimostrazione:



- Una retta che unisce E con H è parallela ad $\overline{AD}$ perché divide i lati $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ in segmenti proporzionali per il corollario inverso del teorema di Talete che dice che se una retta divide due lati di un triangolo in segmenti proporzionali, la retta è parallela al terzo lato.
- Qui il fascio di parallele è costituito dalle due basi del trapezio e dalla retta costruita che, si è visto, tagliato da $\overline{BA}$ e $\overline{CD}$ con conseguenza di segmenti proporzionali con risultante 1, visto che sono eguali. Abbiamo però altre due secanti, $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ che vedono la retta costruita passare per il loro punto medio F e G per il teorema di Talete: se un fascio di rette parallele è tagliato da rette trasversali, il rapporto tra i due segmenti determinati su una trasversale ($\overline{BA}$ e $\overline{CD}$) è eguale al rapporto dei segmenti corrispondenti determinati sull'altra trasversale ($\overline{AC}$ e $\overline{BD}$). C.v.d.

7) Sul triangolo rettangolo ABC, rettangolo in A, si faccia cadere l'altezza relativa all'ipotenusa AD che divide l'ipotenusa in due segmenti: $\overline{DC}=c$ e $\overline{DB}=b$. Si tracci poi una parallela all'ipotenusa che taglia $\overline{AC}$ in F e $\overline{AB}$ in E. $\overline{AF}=d$, $\overline{AE}=a$. Dimostrare che $d^2 : a^2 = c : b$.

Ipotesi: $\overline{FE} \parallel \overline{CB}$; $\overline{CB} \perp \overline{AD}$ **Tesi:** $d^2 : a^2 = c : b$

Dimostrazione:

- Per il teorema di Talete: $d : a = \overline{AC} : \overline{AB}$
- Per il teorema che dice che se quattro segmenti sono in proporzione, sono in proporzione anche i loro quadrati:

$$d^2 : a^2 = \overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 \quad (1)$$

- Per il primo teorema di Euclide:

$$c : \overline{AC} = \overline{AC} : (b+c) \quad \text{e ancora:}$$

$$b : \overline{AB} = \overline{AB} : (b+c) \quad \text{da cui}$$

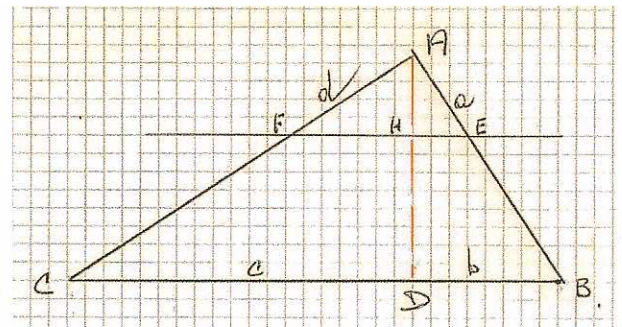
$$\overline{AC}^2 = c((b+c))$$

$$\overline{AB}^2 = b(b+c)$$

- Sostituendo nella (1): $d^2 : a^2 = c((b+c)) : b(b+c)$

- Semplificando: $d^2 : a^2 = c : b$

C.v.d.



8) In una circonferenza è iscritto un triangolo equilatero. Una corda EF taglia i lati AB e BC nei punti medi M e N, rispettivamente. Dimostrare che il punto N divide FM in media ed estrema ragione.

Ipotesi: $\triangle ABC \gg \text{equilatero inscritto}$
 $\overline{AM} = \overline{MB} = \overline{NC} = \overline{NB}$

Tesi: $MF:MN=MN:NF$

Dimostrazione:

- Si considerino le corde secanti $\overline{EF}$ e $\overline{BC}$. Per il teorema che dice che se due corde di una circonferenza s'intersecano, le parti di una sono medi proporzionali delle parti dell'altra, è valida la seguente proporzione: $\overline{EN}:\overline{CN}=\overline{NB}:\overline{NF}$ (1)

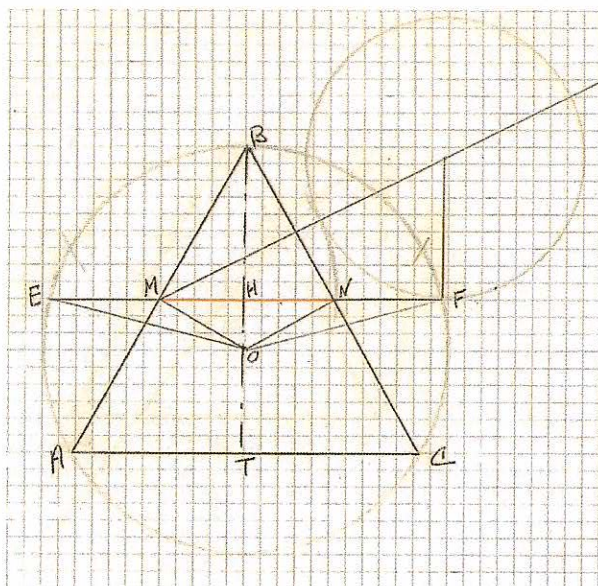
- $\triangle MNB$ è però un triangolo equilatero, poichè $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$ per teorema, passando $\overline{MN}$ per i punti medi dei lati per ipotesi. Ne consegue che $\triangle MNB$ ha gli angoli alla base eguali a quelli di $\triangle ABC$ perchè corrispondenti e B in comune. Di qui ne segue che $\overline{NB}=\overline{MN}$. (2)

- $\overline{CN}=\overline{NB}$ per ipotesi; $\overline{NB}=\overline{MN}$ per la (2). Di qui ne consegue: $\overline{CN}=\overline{MN}$. (3)

- $\overline{BT}$ poi è l'altezza del triangolo equilatero ABC , asse di $\overline{AC}$ e di $\overline{MN}$ e per questo passante per O per teorema. $\triangle EOF$ è un triangolo isoscele per avere i lati obliqui corrispondenti ai raggi della circonferenza. Da qui: $\overline{EH}=\overline{HF}$, poichè l'altezza di un triangolo isoscele è anche mediana al lato di base. Si aggiunge che $\overline{MH}=\overline{HN}$.

- Per differenza di segmenti eguali si ha: $\overline{EN}=\overline{MF}$ (4).

- Sostituendo nella (1) la (2), la (3), e la (4), si ha: $\overline{MF}:\overline{MN}=\overline{MN}:\overline{NF}$. C.v.d.



9) Dimostrare che, se da un punto di un lato di un angolo acuto si conduce la perpendicolare all'altro lato e dal piede di questa la perpendicolare al primo lato e così di seguito, le distanze del vertice dai piedi delle perpendicolari sono in proporzione continua.

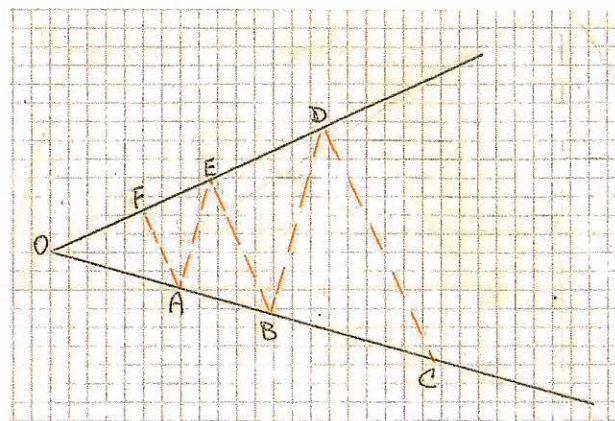
Ipotesi: $\overline{CD} \perp \overline{OD}$; $\overline{DB} \perp \overline{OC}$; $\overline{BE} \perp \overline{OD}$; $\overline{EA} \perp \overline{OC}$; $\overline{AF} \perp \overline{OD}$...

Tesi: $\overline{OF}:\overline{FE}:\overline{ED} \dots = \overline{OA}:\overline{AB}:\overline{BC} \dots$

Dimostrazione:

- $\overline{DC}$, $\overline{EB}$, $\overline{FA}$... tutte perpendicolari a $\overline{OD}$ sono parallele tra loro e formano così un fascio di rette parallele tagliate dalle trasversali $\overline{OD}$ e $\overline{OC}$. Lo stesso vale per $\overline{EA}$, $\overline{DB}$...

- Per il teorema di Talete la tesi risulta dimostrata.



10) Dimostrare che le diagonali di un pentagono si dividono scambievolmente in media ed estrema ragione.

Ipotesi: ABCDE >> pentagono regolare

Tesi: $\overline{AC} : \overline{FC} = \overline{FC} : \overline{AF}$

Dimostrazione:

- Dopo aver tracciato le diagonali AC e BE, si considerino i valori degli angoli alla circonferenza che insistono su una corda/lato del pentagono e su due corde/lati del pentagono. Si assegni il valore x nel primo caso e 2x nel secondo.

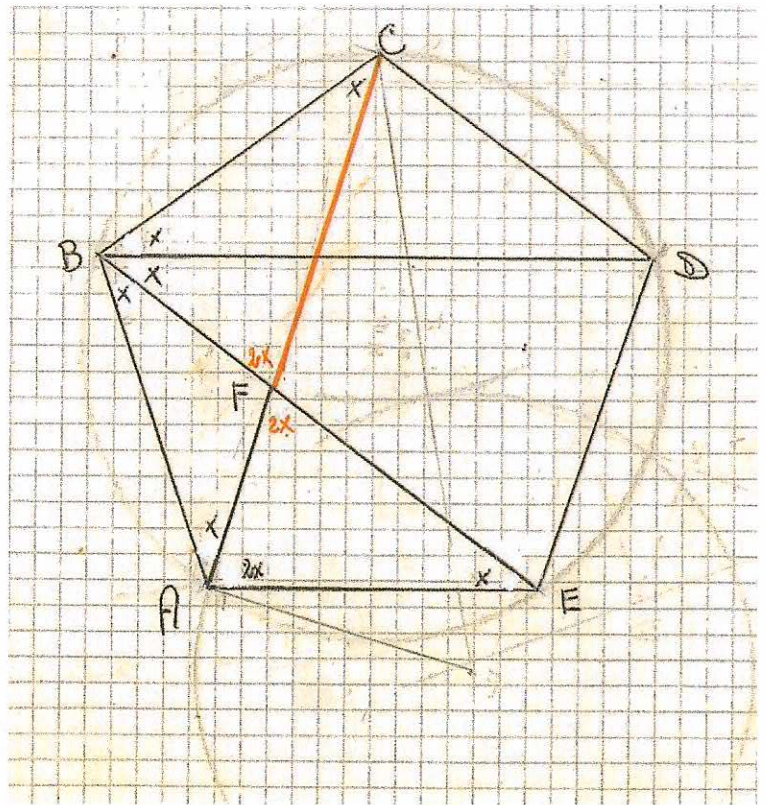
- Valutando il triangolo ABE si evince che la somma interna degli angoli è di 5x (con un valore di 36° per la x).

- Sarà tale anche per il triangolo AFE, perciò l'angolo AFE=2x, come l'opposto al vertice BFC.

- $\triangle BCF$ è dunque isoscele: $\overline{BC} = \overline{CF}$. (1)

- $\triangle ABC \sim \triangle AFB$ per il primo criterio di similitudine dei triangoli, poiché due angoli sono rispettivamente eguali insistendo sullo stesso arco/lato. Ne segue: $\overline{AC} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{AF}$.

- Per la (1) $\overline{BC} = \overline{CF}$. ne segue: $\overline{AC} : \overline{FC} = \overline{FC} : \overline{AF}$. C.v.d.

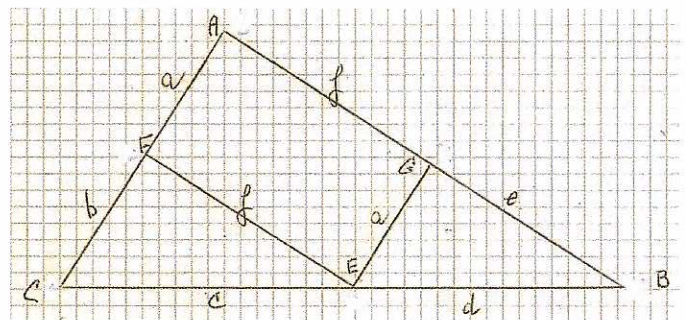


11) In un triangolo rettangolo inscrivere un rettangolo avente un vertice sull'ipotenusa e il vertice dell'angolo retto in comune. Dimostrare che il rettangolo avente per lati le parti in cui resta divisa l'ipotenusa è equivalente alla somma dei due rettangoli aventi per lati le parti in cui restano divisi i cateti.

Ipotesi: $\angle A = 90^\circ$; AGEF rettangolo
 $\overline{AF} = a$; $\overline{FC} = b$; $\overline{CE} = c$; $\overline{EB} = d$; $\overline{BG} = e$; $\overline{GA} = f$

Tesi: $cd = ab + ef$

Dimostrazione:



- Per il teorema di Pitagora applicato ad $\triangle ABC$: $(c+d)^2 = (a+b)^2 + (e+f)^2$
 Svolgendo: $c^2 + d^2 + 2cd = a^2 + b^2 + 2ab + e^2 + f^2 + 2ef$ (1)

- I triangoli CFE e EGB sono anch'essi rettangoli per costruzione del rettangolo AGEF. Per la proprietà dei rettangoli $\overline{AG} = \overline{FE}$ e $\overline{AF} = \overline{GE}$.

- Si applichi anche su $\triangle CFE$ e $\triangle EGB$ il teorema di Pitagora: $c^2 = b^2 + f^2$; $d^2 = a^2 + e^2$ (2)

- Si sostituisca la (2) nella (1): $b^2 + f^2 + a^2 + e^2 + 2cd = a^2 + b^2 + 2ab + e^2 + f^2 + 2ef$

Dopo aver annullato i termini simili si semplifichi tutto per 2: $cd = ab + ef$. C.v.d.

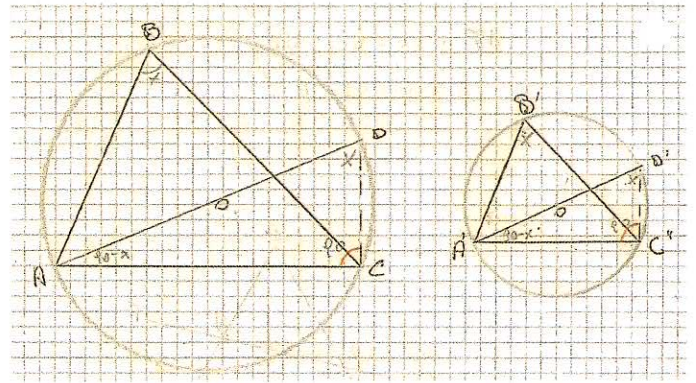
12) Dimostrare che i raggi delle circonferenze circoscritte a due triangoli simili stanno fra loro come due lati omologhi.

Ipotesi: $\triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$

Tesi: $\overline{AC} : \overline{A'C'} = r : r'$

Dimostrazione:

- Da un vertice dei triangoli, ad esempio A e A' si tracci il diametro AD e A'D' delle circonferenze. Si unisca poi l'estremo del diametro con l'altro vertice C e C' dei triangoli.
- Si considerino ora rispettivamente i triangoli ADC e A'D'C', rettangoli in C e C' perché insistono entrambi sui diametri AD e A'D'. Gli angoli D e D' poi sono eguali per la proprietà transitiva, perché insistono rispettivamente sull'arco AC e A'C' sui quali insistono anche $\widehat{B}$ e $\widehat{B'}$ eguali per ipotesi.
- Se ne conclude: $\triangle ADC \approx \triangle A'D'C'$. Di conseguenza: $\overline{AD} : \overline{A'D'} = \overline{AC} : \overline{A'C'}$.
- Se si divide però $\overline{AD}$ e $\overline{A'D'}$ per due, si ottiene il raggio e perciò: $\overline{AC} : \overline{A'C'} = r : r'$. C.v.d.



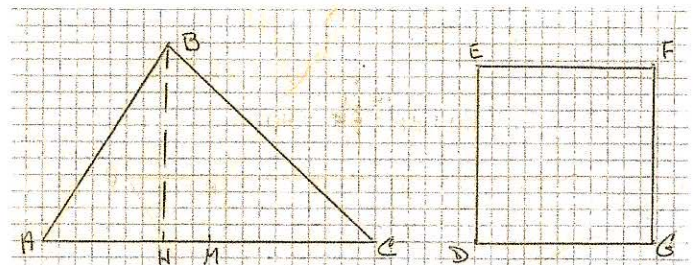
13) Dimostrare che se un quadrato è equivalente a un triangolo, il suo lato è medio proporzionale fra l'altezza e la metà della base del triangolo.

Ipotesi: $\triangle ABC \approx DEFG$.

Tesi: $\overline{BH} : \overline{DE} = \overline{DE} : \overline{AM}$

Dimostrazione:

- La superficie di un triangolo $\frac{bh}{2}$ ossia: $\frac{b}{2}h$
- Se si sostituisce si ha: $\overline{AM} \times \overline{BH}$ che equivale per ipotesi a $\overline{DE} \times \overline{DE}$.
- Sotto forma di proporzione si ha $\overline{BH} : \overline{DE} = \overline{DE} : \overline{AM}$. C.v.d.

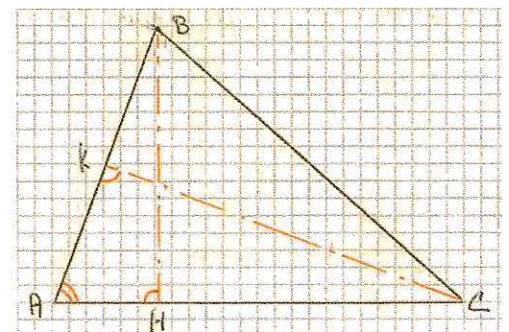


14) Dimostrare che le altezze relative a due lati di un triangolo qualunque stanno fra loro in rapporto inverso dei lati stessi.

Ipotesi: $\overline{BH} \perp \overline{AC}$; $\overline{CK} \perp \overline{AB}$ **Tesi:** $\overline{BH} : \overline{CK} = \overline{AB} : \overline{AC}$

Dimostrazione:

- $\triangle ABH \approx \triangle ACK$ per il primo criterio di similitudine dei triangoli:
 $\widehat{H} = \widehat{K} = 90^\circ$; $\widehat{A}$ in comune.
- Ne consegue: $\overline{BH} : \overline{CK} = \overline{AB} : \overline{AC}$. C.v.d.



15) Dimostrare che la corda parallela a un lato di un triangolo passante per il baricentro è i $\frac{2}{3}$ del lato stesso.

Ipotesi: $\overline{BL}=\overline{AL}$; $\overline{AP}=\overline{PC}$; $\overline{CT}=\overline{TB}$.

Tesi: $\overline{HK}=\frac{2}{3}\overline{AC}$

Dimostrazione:

- Si ricordi che le mediane s'intersecano nel baricentro che divide la mediana in due parti di cui quella dalla parte del vertice è doppia dell'altra.

- $\widehat{BOK} \approx \widehat{BPC}$ per il primo criterio di similitudine dei triangoli:

$\widehat{BKO} = \widehat{BCP}$ e $\widehat{BOK} = \widehat{BPC}$ perché angoli corrispondenti delle parallele HK e AC tagliate dalle trasversali BC e BP. Ne consegue:

$$\overline{BP}:\overline{BO}=\overline{PC}:\overline{OK}$$

- Si moltiplichino per due il secondo membro: $\overline{BP}:\overline{BO}=2\overline{PC}:2\overline{OK} \Rightarrow \overline{BP}:\overline{BO}=\overline{AC}:\overline{HK}$

- $\overline{BP}:\overline{BO} = \frac{3}{2}$ Da cui: $\overline{AC}:\overline{HK} = \frac{3}{2}$ C.v.d.

