

ESERCIZI LEZIONE 9

1) E' dato un semicerchio di diametro AB e centro O. Si congiunga un punto qualunque C di AB con il punto medio M della semicirconferenza e si conduca la perpendicolare per C ad AB che incontri in D la semicirconferenza. Dimostrare che: $CM^2 + CD^2 \equiv 2AO^2$.

Ipotesi: $\overline{AM} = \overline{MB}$; $\overline{DC} \perp \overline{AB}$

Tesi: $CM^2 + CD^2 \equiv 2AO^2$

Dimostrazione:

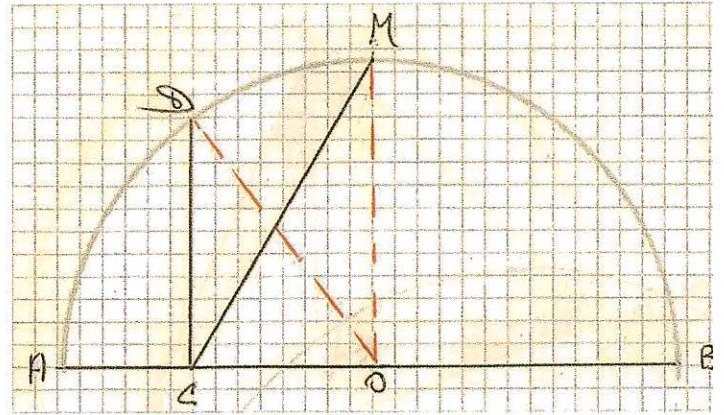
- Si consideri il triangolo rettangolo DCO e vi si applichi il teorema di Pitagora. $CD^2 \equiv DO^2 - CO^2$. (1)
- Si consideri il triangolo rettangolo CMO e vi si applichi il teorema di Pitagora: $CO^2 \equiv CM^2 - OM^2$. (2)
- Si sostituisca a CO^2 della (1) la (2):

$$CD^2 \equiv DO^2 - CM^2 + OM^2$$

$$CM^2 + CD^2 \equiv DO^2 + OM^2$$

- $\overline{DO}$ e $\overline{OM}$ però sono raggi e corrispondono ad $\overline{AO}$. Vale perciò l'eguaglianza: $CM^2 + CD^2 \equiv 2AO^2$.

C.v.d.



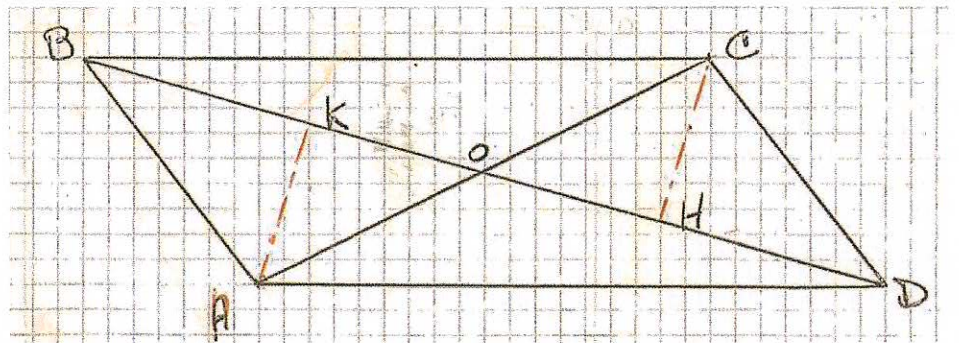
2) Dimostrare che sono equivalenti i quattro triangoli individuati dalle diagonali di un parallelogrammo.

Ipotesi: ABCD parallelogrammo

Tesi: $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{AOD}$

Dimostrazione:

- $\widehat{BOC} = \widehat{AOD}$ per il terzo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\overline{BC} = \overline{AD}$ perché lati opposti di un parallelogrammo; $\overline{OC} = \overline{OA}$ e $\overline{BO} = \overline{OD}$ perché le diagonali di un parallelogrammo si bisecano. In particolare i due triangoli hanno eguale l'altezza relativa ai lati BC e AD perciò, con base e altezza eguali sono equivalenti. Per le stesse ragioni $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$.
- $\widehat{BOC} = \widehat{AOD}$ per il terzo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\overline{BD}$ in comune; $\overline{BA} = \overline{CD}$ e $\overline{BC} = \overline{AD}$ perché ABCD parallelogrammo. In particolare i due triangoli hanno eguale l'altezza relativa al lato BD, $\overline{AK} = \overline{CH}$.
- Le due altezze considerate sono anche le altezze dei triangoli COD e AOD relative alla base OD comune. Con base comune e altezze eguali anche $\widehat{COD} = \widehat{AOD}$.
- Se ne conclude che $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{AOD}$. C.v.d.



3) Due circonferenze di raggi r e $3r$ sono tangenti esternamente. Condotta una retta tangente ad entrambe non passante per il punto di tangenza, dimostrare che il trapezio avente per vertici i punti di contatto e i centri delle due circonferenze è equivalente alla somma di un rettangolo avente per lati il segmento definito dai due punti di tangenza e il raggio r , e di un triangolo rettangolo (da definire sulla figura) avente un angolo eguale a $\frac{1}{3}$ di angolo retto.

Ipotesi: $\overline{OH} = 3r$; $\overline{TK} = r$; $\overline{OH}$ e $\overline{TK} \perp t$; $HKTO = \text{trapezio}$.

Tesi: $OHKT \equiv (r * HK) + \text{tr.ret. con angolo } 30^\circ$

Dimostrazione:

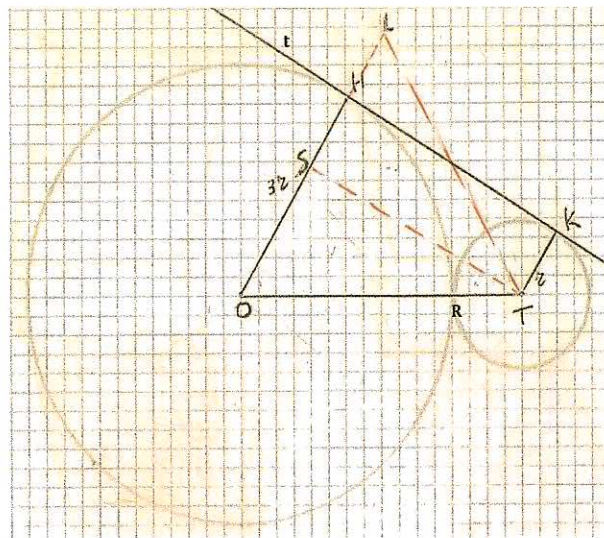
- Si tracci una parallela a t per T . Si ha un rettangolo perché i lati opposti sono paralleli, i maggiori per costruzione, i minori perché entrambi perpendicolari a t , gli angoli poi sono retti per ipotesi. Questo rettangolo ha per dimensioni il raggio r e HK , il segmento cioè definito su t dai punti di tangenza.

- Si deve ancora dimostrare che il triangolo OST , in cui risulta equiscomponibile il trapezio di ipotesi con il rettangolo di cui si è detto, ha un angolo di 30° , cioè $\frac{1}{3}$ di angolo retto, come da ipotesi.

- $\overline{OT} = \overline{OR} + \overline{RT} = 4r$; $\overline{OS} = \overline{HO} - \overline{HS} = 2r$; se si prolunga $\overline{OH}$ di $\overline{HL} = r$ e si unisce L con T , il triangolo OLT è equilatero perché $\widehat{OST}$ e $\widehat{STL}$ sono triangoli la cui eguaglianza è evidente per il primo criterio d'eguaglianza dei triangoli.

- Se equilatero è anche equiangolo: $\widehat{O} = \widehat{L} = \widehat{T} = 60^\circ$.

- Il triangolo SOT ha dunque l'angolo in T di 30° . L'uguaglianza si può ritenere soddisfatta. C.v.d.



4) Dimostrare che dei quattro triangoli determinati dalle diagonali di un trapezio sono equivalenti quelli aventi per lati i lati obliqui del trapezio stesso.

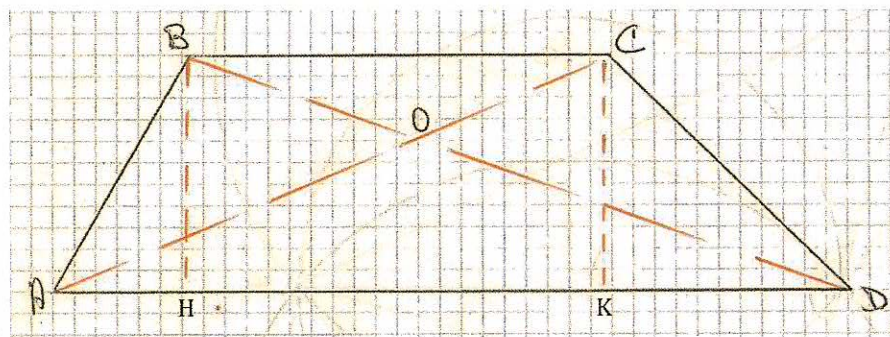
Ipotesi: ABCD trapezio

Tesi: $\widehat{BOA} \equiv \widehat{COD}$

Dimostrazione:

- $\triangle ABD \equiv \triangle DCA$ perché hanno la stessa base AD e la stessa altezza $\overline{BH}$ e $\overline{CK}$, che è l'altezza del trapezio.

- Se si toglie ai due triangoli suddetti il triangolo AOD che è comune a entrambi, si ottengono rispettivamente $\widehat{BOA}$ e $\widehat{COD}$ che risultano equivalenti per differenza di triangoli equivalenti. C.v.d.



5) Dimostrare che in un triangolo scaleno la differenza dei quadrati di due lati è equivalente alla differenza dei quadrati delle parti in cui resta diviso il terzo lato dall'altezza a esso relativa.

Ipotesi: $\widehat{BH} \perp \widehat{AC}$

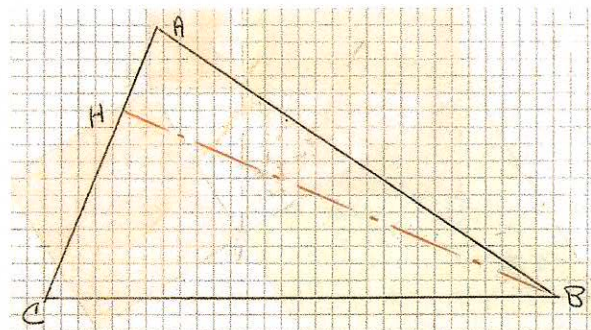
Tesi: $AB^2 - CB^2 \equiv AH^2 - CH^2$

Dimostrazione:

- Si applichi il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli BHA e BHC:

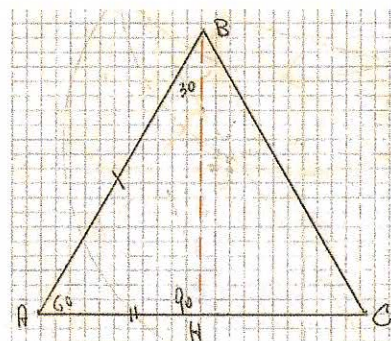
$$\begin{aligned} AB^2 &\equiv BH^2 + AH^2 \\ CB^2 &\equiv BH^2 + CH^2 \\ AB^2 - CB^2 &\equiv AH^2 - CH^2 \quad \text{C.v.d.} \end{aligned}$$

Si sottragga poi membro a membro.



N.B.: E' importante ricordare una proprietà dei triangoli rettangoli con angoli di 30° e di 60° , dove l'ipotenusa non è altro che il doppio del cateto minore.

Infatti, un triangolo rettangolo con queste caratteristiche non è altro che la metà di un triangolo equilatero su cui è stata tracciata l'altezza che fa anche da bisettrice e mediana. ABH è, infatti, un triangolo rettangolo con un angolo da 60° , perché angolo di un triangolo equilatero, e l'altro da 30° perché $\widehat{BH}$ fa da bisettrice ma anche da mediana; perciò $\widehat{AH} = \frac{1}{2}\widehat{AC}$ che vale per $\frac{1}{2}\widehat{AB}$. $\widehat{AB}$ però è il cateto minore del triangolo rettangolo ABH, di cui $\widehat{AB}$ è l'ipotenusa.



6) Sul punto medio M del lato AB di un triangolo equilatero ABC, si conduca la perpendicolare MP al lato BC. Dimostrare che $MP \equiv 3\left(\frac{AB}{4}\right)^2$.

Ipotesi: $\widehat{ABC}$ equilatero; $\widehat{AM} = \widehat{MB}$; $\widehat{MP} \perp \widehat{BC}$

Tesi: $MP \equiv 3\left(\frac{AB}{4}\right)^2$

Dimostrazione:

- Si consideri il triangolo rettangolo MPB con angoli da 30° e 60° : $\widehat{MB} = 2\widehat{PB}$ e $\widehat{AB} = 4\widehat{BP}$

- Si applichi il teorema di Pitagora a MPB:

$$MP^2 \equiv MB^2 - BP^2$$

- Si sostituisca al secondo membro facendo riferimento sempre al lato AB:

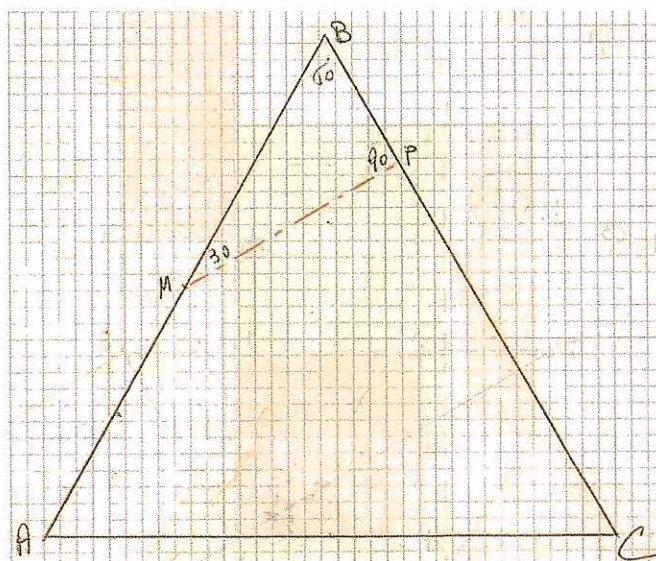
$$MP^2 \equiv (AB/2)^2 - (AB/4)^2$$

$$MP^2 \equiv AB^2/4 - AB^2/16$$

$$MP^2 \equiv (4AB^2 - AB^2)/16$$

$$MP^2 \equiv 3(AB^2/16)$$

$$MP^2 \equiv 3\left(\frac{AB}{4}\right)^2 \quad \text{C.v.d.}$$



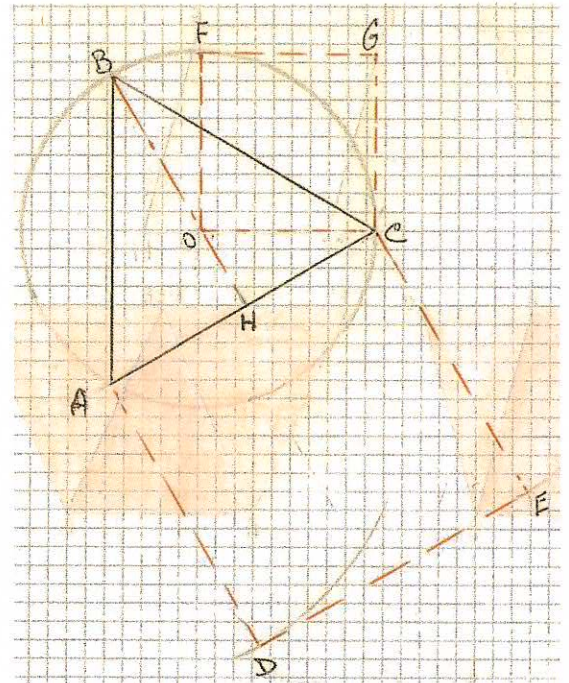
7) Dimostrare che il quadrato costruito su di un lato di un triangolo equilatero è equivalente al triplo del quadrato avente per lato il raggio del cerchio circoscritto al triangolo dato.

Ipotesi: ABC triangolo equilatero
 OCGF quadrato
 ACED quadrato

Tesi: $AC^2 \equiv 3OC^2$

Dimostrazione:

- Si dia un valore letterale ad $\overline{AC} = a$.
- Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo ABH:
 $BH^2 = a^2 - (a/2)^2$; $\overline{BH} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.
- BH, altezza, nel triangolo equilatero è anche mediana e bisettrice che con il baricentro nel centro della circonferenza circoscritta ha diviso $\overline{BH}$ in due parti di cui una è il doppio dell'altra e corrisponde al raggio del cerchio $\overline{BO}$:
 $\overline{BO} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$
- $\overline{BO}$ è anche il lato di OCGF la cui area sarà $(\frac{a}{3}\sqrt{3})^2 = \frac{1}{3}a^2$.
- L'area di ACED = a^2 . Da cui $AC^2 \equiv 3OC^2$. C.v.d.



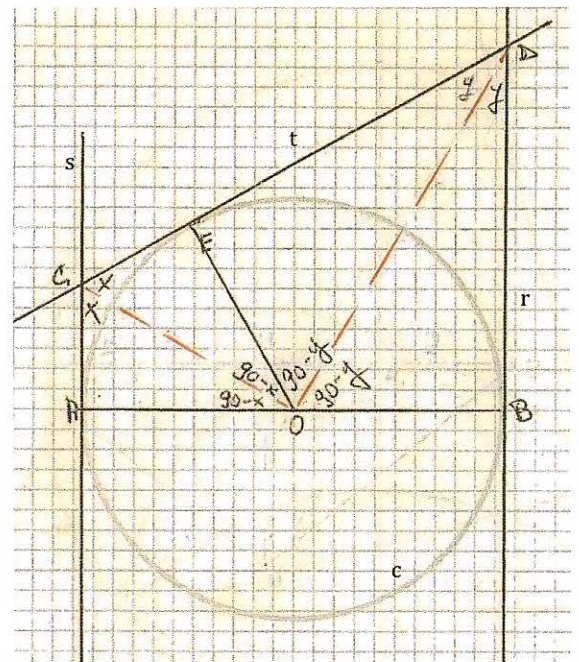
8) In un cerchio si conducano le tangenti negli estremi A e B di un diametro e la tangente in un punto E qualunque di una delle semicirconferenze determinate da A e B, che incontri le precedenti nei punti C e D. Dimostrare che il rettangolo avente per lati CE e DE è equivalente al quadrato avente per lato il raggio OE.

Ipotesi: s, r, t tangenti a c
 $\overline{AB} \perp s$
 $OE \perp t$

Tesi: $CE \times DE \equiv OE^2$

Dimostrazione:

- Si unisca O con C e con D e si provi che il triangolo COD è rettangolo in O.
- Per teorema $\overline{DO}$ e $\overline{CO}$ sono bisettrici degli angoli D e C cui si assegni il valore di $2y$ e $2x$.
- Si considerino i triangoli rettangoli ACO e BOD che hanno l'angolo in O rispettivamente di $90-x$ e di $90-y$.
- $\widehat{COD} = 180^\circ - (90-x) - (90-y) = x+y$. (1)
- $\widehat{ACD} + \widehat{CDB} = 180^\circ$ perché angoli coniugati interni delle rette s ed r tagliate da t.
- Dividendo membro a membro per 2: $ACD/2 + CDB/2 = 90^\circ \gg \gg x + y = 90^\circ$
- Sostituendo la (2) nella (1) si conclude che $\widehat{COD} = 90^\circ$.
- Applicando al triangolo rettangolo COD il secondo teorema di Euclide: $CE \times DE \equiv OE^2$. C.v.d.



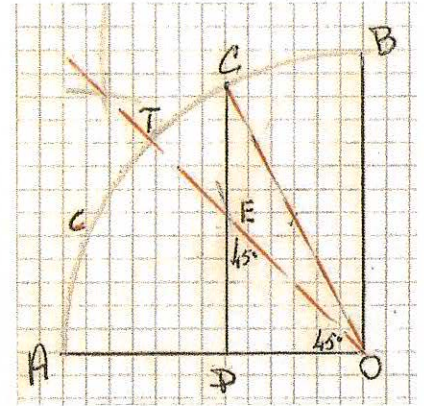
9) Dato un quadrante AOB di una circonferenza, da un punto qualsiasi C dell'arco AB condurre la perpendicolare CD al raggio OA. Detto E il punto d'intersezione di CD con la bisettrice dell'angolo AOB, dimostrare che $CD^2 + DE^2 \equiv AO^2$.

Ipotesi: $\overline{CD} \perp \overline{OA}$; $\widehat{TOB} = \widehat{TOA}$

Tesi: $CD^2 + DE^2 \equiv AO^2$

Dimostrazione:

- Si consideri il triangolo rettangolo DCO e vi si applichi il teorema di Pitagora: $CO^2 \equiv CD^2 + DO^2$. (1)
- $\overline{CO} = \overline{AO}$ perché entrambi raggi. (2)
- $\overline{DO} = \overline{DE}$ (3) perché lati del triangolo isoscele EDO, isoscele perché gli angoli alla base sono di 45° , infatti la bisettrice OT divide BOA, angolo retto in due parti eguali; e per differenza degli angoli interni al triangolo EDO, anche $\widehat{DEO} = 45^\circ$.
- Sostituendo (2) e (3) alla (1): $AO^2 \equiv CD^2 + DE^2$. C.v.d.

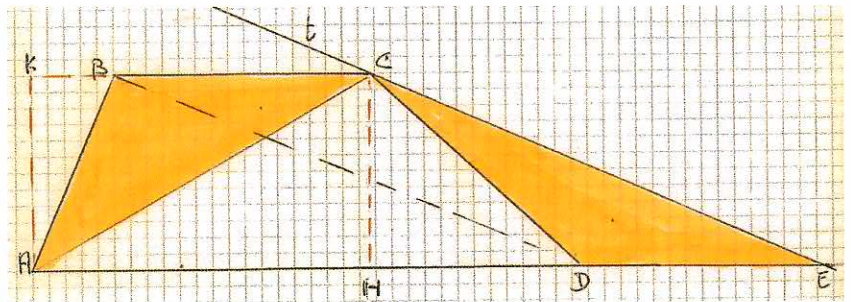


10) Per il vertice della base minore CB di un trapezio ABCD si conduca la parallela alla diagonale BD fino a incontrare in E il prolungamento della base maggiore. Dimostrare che il triangolo ACE è equivalente al trapezio dato.

Ipotesi: ABCD trapezio;
 $t \parallel BD$

Tesi: $ABCD \equiv \triangle ACE$

Dimostrazione:



- Il trapezio ABCD e triangolo ACE hanno in comune il triangolo ACD. Rimane del trapezio il triangolo ABC e del triangolo ACE il triangolo CDE. Se $\widehat{ABC} \equiv \widehat{CDE}$, $ABCD \equiv \triangle ACE$ perché equiscomponibili.
- $\widehat{ABC} \equiv \widehat{CDE}$ perché hanno la stessa base $\overline{DE} = \overline{BC}$ considerato il parallelogrammo BCED che ha i lati opposti paralleli per ipotesi e dunque anche eguali.
- I due triangoli hanno anche la stessa altezza $\overline{AK} = \overline{CH}$ perché distanza tra due rette parallele BC e AD.
- Triangoli con la stessa base e la stessa altezza sono equivalenti per teorema. C.v.d.