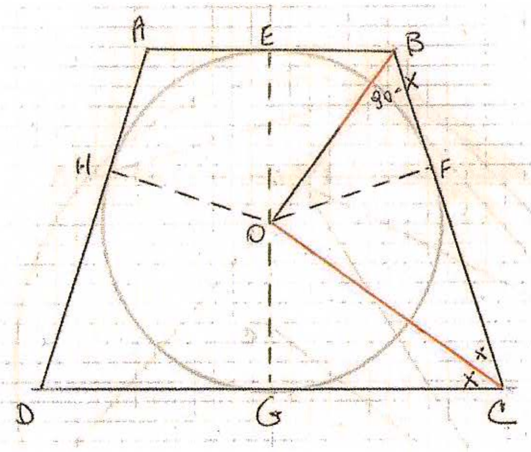
ESERCIZI LEZIONE 8

1) Dimostrare che, se un trapezio isoscele è circoscritto a una circonferenza, il lato obliquo è eguale alla semisomma delle basi; e inoltre che il lato obliquo è l'ipotenusa del triangolo rettangolo che ha come cateti i segmenti che uniscono il centro della circonferenza con gli estremi del lato obliquo.



Ipotesi: ABCD >>trapezio isoscele circoscritto

Tesi: $\overline{BC} = \frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{DC})$; $\widehat{BOC}=90°$

Dimostrazione:

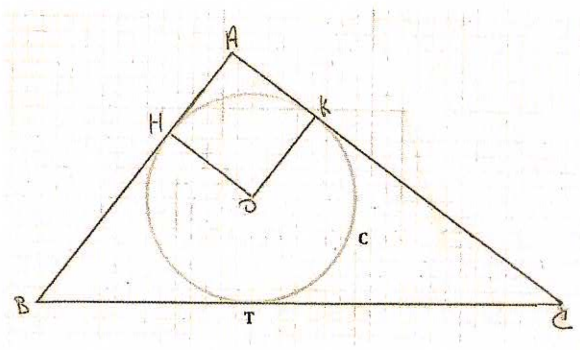
- Per il teorema che dice che da un punto esterno a una circonferenza i segmenti che uniscono il punto ai punti di tangenza a una circonferenza sono eguali, possiamo scrivere e sommare membro a membro:

$$\begin{aligned} \overline{BF} &= \overline{EB} \\ \overline{FC} &= \overline{GC} \\ \overline{AH} &= \overline{AE} \\ \overline{HD} &= \overline{DG} \\ \hline \overline{BC}+\overline{AD} &= \overline{AB}+\overline{DC}. \end{aligned}$$

Dividendo poi i singoli membri per 2: $\overline{BC} = \frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{DC})$

- Si assegnino poi dei valori letterari ai singoli angoli ricordando il teorema che dice che da quel punto da cui sono state tracciate le tangenti alla circonferenza, se lo si unisce al centro della circonferenza, si ha la bisettrice dell'angolo determinato dalle due tangenti. E poi ricordando che gli angoli determinati dal lato obliquo di un trapezio isoscele sono supplementari.
- Sia $\widehat{BCO}=x$; $\widehat{OBC}=90-x$; $\widehat{BOC}=180-x-90+x=90°$. C.v.d.

2) Dimostrare che l'ipotenusa di un triangolo rettangolo è eguale alla somma dei cateti diminuita del diametro della circonferenza iscritta.



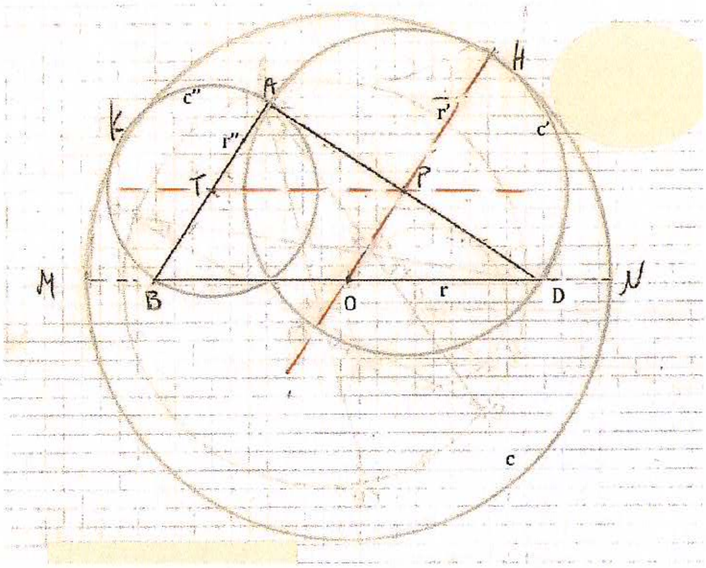
Ipotesi: $\widehat{A}=90°$; $\widehat{ABC}$ circoscritto a c

Tesi: $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}-(\overline{OH}+\overline{OK})$

Dimostrazione:

- Per il teorema che dice che da un punto esterno a una circonferenza i segmenti che uniscono il punto ai punti di tangenza a una circonferenza sono eguali, possiamo scrivere e sommare membro a membro: $(\overline{TC}=\overline{KC}) + (\overline{TB}=\overline{HB}) = \mathbf{\overline{BC}=\overline{KC}+\overline{HB}}$.
- Rimangono $\overline{AH}$ e $\overline{AK}$ che corrispondono ai due raggi OH e OK, perché OKAH è un quadrato, infatti, ha tutti gli angoli retti, i lati successivi eguali a due a due: $\overline{OH}=\overline{OK}$ perché raggi; $\overline{AH}=\overline{AK}$ per il teorema citato sopra. Valida perciò è l'eguaglianza $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}-(\overline{OH}+\overline{OK})$. C.v.d.

3) Dato un triangolo rettangolo, tracciare sui due cateti due circonferenze aventi per diametri i cateti stessi e verificare che sono tangenti internamente alla circonferenza avente per centro il punto medio dell'ipotenusa e per raggio la semisomma dei cateti.



Ipotesi: $r=\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{AB})$; $r'=\frac{1}{2}\overline{AD}$; $r''=\frac{1}{2}\overline{AB}$;

Tesi: c' e c'' tangenti a c

Dimostrazione:

- Per il teorema che dice che due circonferenze sono tangenti internamente quando la distanza dai loro centri è eguale alla differenza dei raggi, considero $\overline{OP}=\overline{OH}-\overline{PH}$ (r-r'). (1)

- Dall'ipotesi, sostituendo nella (1), si ha:
$\overline{OP}=\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{AB})-\frac{1}{2}\overline{AD}$; $\frac{1}{2}\overline{AD}+\frac{1}{2}\overline{AB}-\frac{1}{2}\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{AB}$.

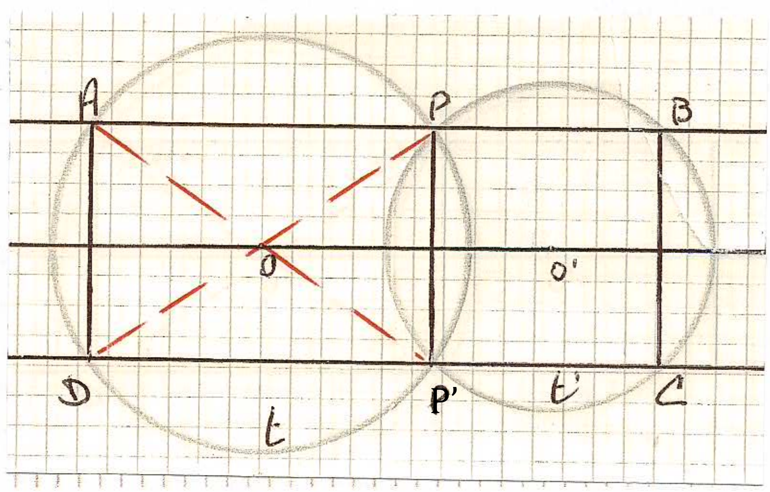
- La differenza dei due raggi considerati deve essere perciò la metà dell'altro cateto. Se si riesce a dimostrare che **$\overline{BT}=\overline{PO}$** si può considerare soddisfatta la prima richiesta della tesi.

- Le secanti TP e PO che passano attraverso il punto medio dei cateti e dell'ipotenusa, determinano per costruzione segmenti eguali: $\overline{BO}=\overline{OD}$; $\overline{BT}=\overline{TA}$; $\overline{AP}=\overline{PD}$. Per il teorema che dice che se si congiungono con un segmento i punti medi di due lati di un triangolo, la congiugente è parallela al terzo lato, le secanti suddette sono parallele rispettivamente a $\overline{BD}$ e ad $\overline{AB}$.

- BTPO è dunque un parallelogrammo dove **BT=PO**.

- Con lo stesso procedimento si dimostra la tangenza di c'' a c. C.v.d.

4) Dai punti P e P' d'intersezione di due circonferenze condurre le parallele alla congiungente i centri O e O' che incontrano le circonferenze, rispettivamente nei punti A e B, C e D. Dimostrare che il quadrilatero ABCD è un parallelogrammo rettangolo.



Ipotesi: t secante t'; AB//OO'//DC

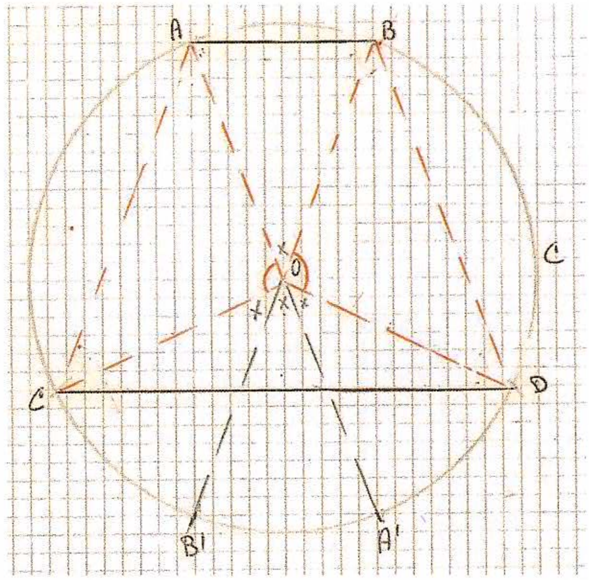
Tesi: ABCD parallelogrammo rettangolo

Dimostrazione:

- Si considerino le parallele AB e DC, intersecate da PP': gli angoli coniugati interni, APP' e PP'D sono supplementari.
- Si consideri il quadrilatero APP'D inscritto in t, gli angoli opposti, APP' e ADP', sono supplementari.
- Ne consegue che $\widehat{PP'D}=\widehat{ADP'}$.
- I due angoli suddetti sono angoli alla circonferenza di t che, essendo eguali, insistono su archi eguali che sottendono corde eguali. $\overline{AP'}=\overline{DP}$.
- $\overline{AP'}$ e $\overline{DP}$ sono però le diagonali APP'D che, in quanto eguali, fanno del quadrilatero APP'D oltretutto con $\overline{AP}//\overline{DP'}$ e due angoli consecutivi eguali, un rettangolo.
- A stesse conclusioni si perviene con il quadrilatero PP'CB che con i lati giacenti sulle stesse parallele di APP'D, determina, sommato, il rettangolo ABCD. C.v.d.

- A stesse conclusioni si perviene con il quadrilatero PP'CB che con i lati giacenti sulle stesse parallele di APP'D, determina, sommato, il rettangolo ABCD. C.v.d.

5) Dalle estremità A e B di un arco di circonferenza, si traccino i raggi e li si prolunghino fino a incontrare la circonferenza nel semicerchio opposto in A' e B'. Da A' e B', si traccino due archi eguali ad $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{A'D}$ e $\overset{\frown}{B'C}$. Unire C a D e dimostrare che CD è parallelo ad AB.



Ipotesi: $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CB'}=\overset{\frown}{A'B'}=\overset{\frown}{A'D}$

Tesi: $\overline{AB}//\overline{CD}$

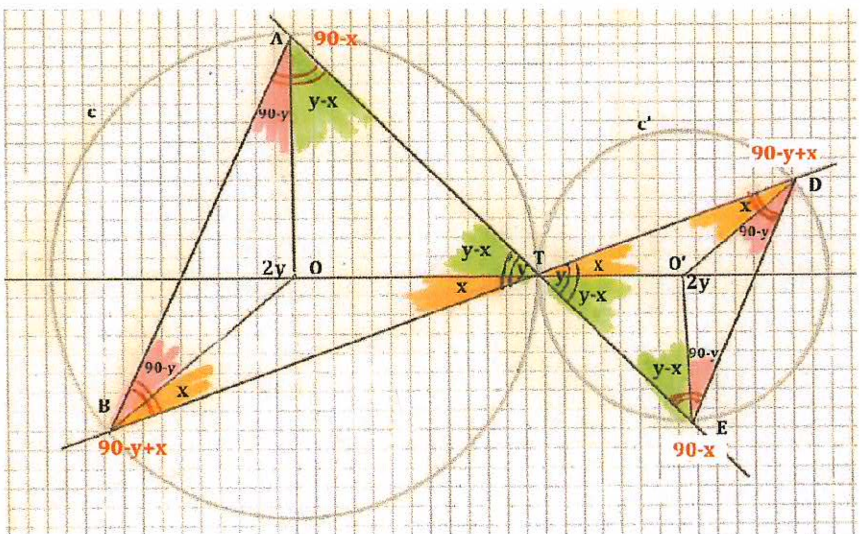
Dimostrazione:

- $\widehat{AOC}=\widehat{BOD}$ per il primo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\overline{AO}=\overline{CO}=\overline{BO}=\overline{DO}$ perché raggi; $\widehat{AOC}=\widehat{BOD}$ perché si ha una differenza di angoli eguali: (360-4x): 2, in perfetta simmetria, B'OA' opposto al vertice di AOB, di lato gli altri due, eguali per costruzione.
- I triangoli AOB e COD sono isosceli, perciò hanno gli angoli alla base eguali.
- Per somma di angoli eguali: $\hat{A}=\hat{B}$ e $\hat{C}=\hat{D}$.
- Per il teorema che dice che un quadrilatero inscritto in una circonferenza ha angoli opposti supplementari: $\hat{C}+\hat{B}=180$. Ma $\hat{C}=\hat{D}$, dunque $\hat{D}+\hat{B}=180$.
- Se $\hat{D}$ e $\hat{B}$ sono supplementari sono coniugati interni di $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ tagliati dalla secante $\overline{BD}$, dunque paralleli. C.v.d.

6) Se due circonferenze sono tangenti esterne, e con il vertice del punto di contatto si tracciano due angoli opposti al vertice, dimostrare che sono parallele le corde sottese dagli archi sui quali insistono.

Ipotesi: $\widehat{ATB}=\widehat{DTE}$ **Tesi:** $\overline{AB}//\overline{DE}$

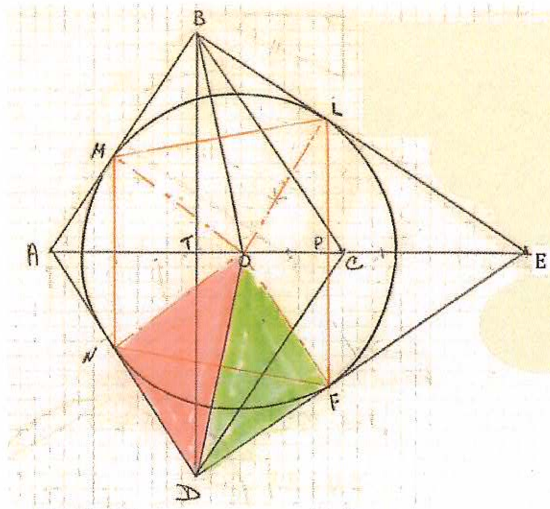
Dimostrazione:



Si diano dei valori letterari ai singoli angoli, ricordando che gli angoli al centro sono il doppio di quelli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco. Inoltre ricordare che i triangoli che hanno come lati obliqui i raggi di una circonferenza sono isosceli.
- Siano y gli angoli opposti al vertice. Sono opposti al vertice anche $\widehat{OTB}$ con $\widehat{DTO'}$ e $\widehat{O'TE}$ con $\widehat{ATO}$.
- Valutando la concatenazione di valori evidenziati dalla figura, si arriva a definire che $\widehat{BAT}=\widehat{TED}$ e $\widehat{TDE}=\widehat{TBA}$,
- Gli angoli suddetti però sono alterni interni alle due parallele su cui giacciono le due corde, tagliate dalle trasversali AE e BD. Dunque $\overline{AB}//\overline{DE}$. C.v.d.

Ne segue che se anche solo un angolo di un triangolo iscritto in una circonferenza è eguale all'angolo di un altro triangolo inscritto in un'altra circonferenza di raggio non eguale, sono eguali anche gli altri due angoli dei due triangoli.

7) Dimostrare che se si congiunge un punto E del prolungamento della diagonale minore AC di un rombo ABCD con i vertici B e D, si ottiene un quadrilatero ABED circoscrittibile e che i punti di contatto con la circonferenza sono vertici di un trapezio isoscele.



Ipotesi:
ABCD rombo
$\widehat{MBO}=\widehat{OBE}$; $\widehat{ADO}=\widehat{ODE}$; $\widehat{BEA}=\widehat{AED}$; $\widehat{BAE}=\widehat{EAD}$ (1)
Tesi:
$\overline{OM}=\overline{OL}=\overline{OF}=\overline{ON}$
MLFN trapezio isoscele

Dimostrazione:

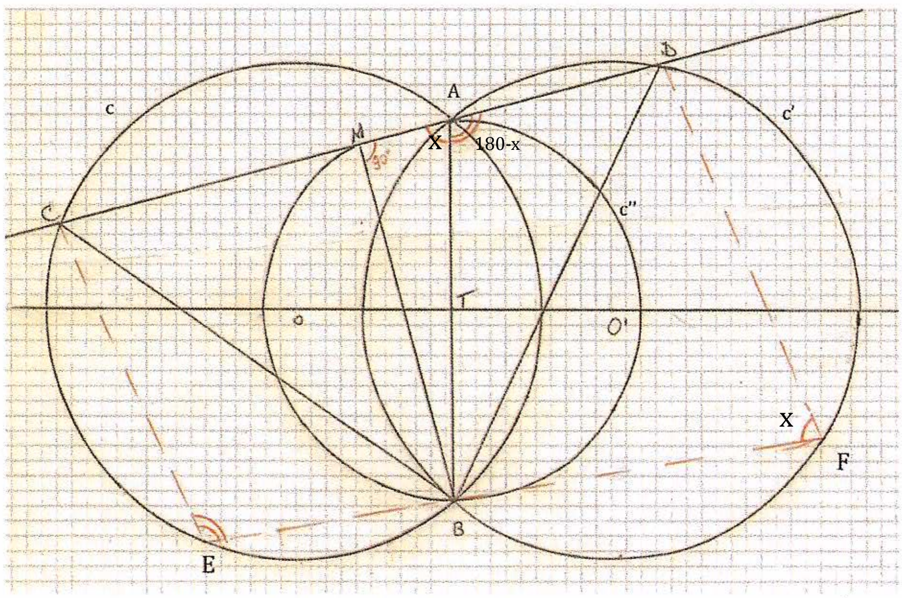
- $\overset{\triangle}{BTE}=\overset{\triangle}{DTE}$ per il primo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\overline{BT}=\overline{TD}$ e $\widehat{BTE}=\widehat{DTE}=90°$ perché le diagonali in un rombo si bisecano perpendicolarmente; TF in comune.
In particolare $\mathbf{\overline{BE}=\overline{DE}}$ (2)
- $\overset{\triangle}{BOE}=\overset{\triangle}{DOE}$ per il primo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\overline{BE}=\overline{DE}$ per la (2); $\overline{OE}$ in comune; $\widehat{BEA}=\widehat{AED}$ per la (1). In particolare $\mathbf{\overline{OL}=\overline{OF}}$ perché altezze di triangoli eguali allo stesso lato.
- $\overset{\triangle}{OND}=\overset{\triangle}{ODF}$ per il secondo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\overline{OD}$ in comune; $\widehat{ADO}=\widehat{ODE}$ per la (1); $\widehat{N}$ e $\widehat{F}$ angoli retti. In particolare $\mathbf{\overline{ON}=\overline{OF}}$.
- Con lo stesso ragionamento anche $\mathbf{\overline{OM}=\overline{OL}}$.

Dunque il punto d'incontro delle bisettrici è equidistante dai lati del quadrilatero dove può essere inscritto un cerchio.

- Il triangolo LEF è isoscele perché $\overline{LE}=\overline{EF}$. La bisettrice dell'angolo al vertice fa dunque anche da altezza e cade perpendicolarmente su $\overline{LF}$; cade perpendicolarmente anche su $\overline{BD}$ per ipotesi, dunque LF//BD. Stesso ragionamento per il triangolo AMN, perciò $\overline{MN}$//LF le due basi del trapezio.
- Sono eguali gli angoli alla base $\widehat{L}$ e $\widehat{F}$ per la proprietà transitiva, perché supplementari entrambi al loro angolo opposto e allo stesso tempo supplementari ai loro coniugati interni: $\widehat{N}+\widehat{L}=180°$; $\widehat{N}+\widehat{F}=180°$ ne segue che $\widehat{L}=\widehat{F}$.

MLFN è un trapezio isoscele. C.v.d.

8) Se due circonferenze eguali di centro O e O' si secano nei punti A e B, e dal punto A d'intersezione si conduce una retta non parallela alla congiungente i centri, che le seghi nei punti C e D, dimostrare che la circonferenza avente per diametro la corda AB taglia CD nel punto medio M.



Ipotesi: c=c'; **Tesi:** $\overline{CM}=\overline{MD}$

Dimostrazione:

- Si unisca B con C, M, D.

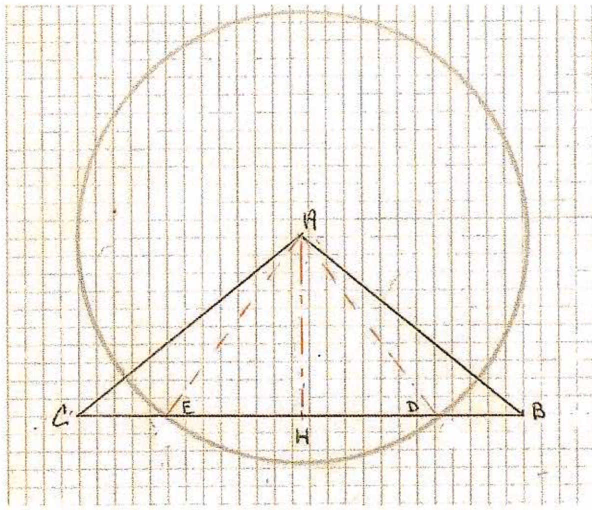
- $\widehat{BMD}=90°$ perché angolo alla circonferenza che insiste sul diametro AB di c''.

- Si considerino gli angoli supplementari $\widehat{BAD}$ e $\widehat{BAC}$. $\widehat{BAD}$ sarebbe supplementare anche con un ipotetico angolo DFB di un

ipotetico quadrilatero che come angolo alla circonferenza insisterebbe su AB di c' come CAB insiste su CB di c. Circonferenze eguali, angoli alla circonferenza eguali, archi eguali, corde eguali: BC=BD.
- Il triangolo CDB è dunque isoscele con BM altezza relativa alla base, che però in un triangolo isoscele è anche mediana: CM=MD. C.v.d.

9) Dimostrare che se con centro nel vertice A di un triangolo isoscele ABC si descrive una circonferenza che taglia la base nei punti D e E, i segmenti BD e CE sono eguali.

Ipotesi: AC=AB; **Tesi:** CE=BD

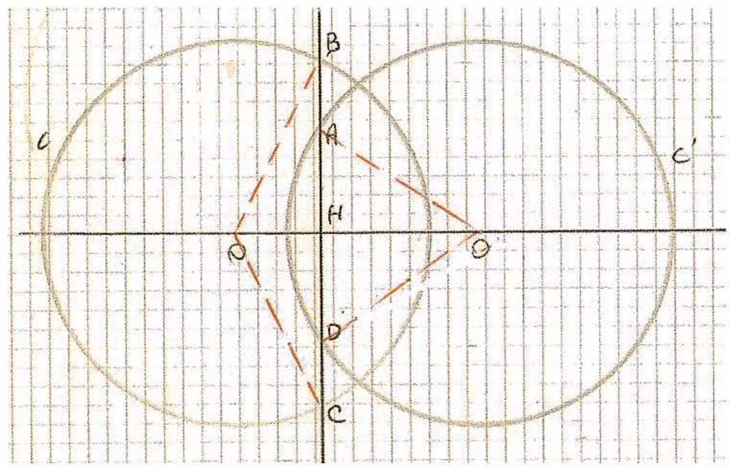


Dimostrazione:

- Si unisca A con E e con D. Il triangolo AED è isoscele per avere AE=AD perché raggi.
- AH corrisponde all'altezza del triangolo iniziale cadendo perpendicolarmente nella metà della corda ED.
- Per differenza di segmenti eguali, CH-EH e HB-HD, risulta CE=BD. C.v.d.

10) Date due circonferenze eguali e secanti, condurre una retta perpendicolare alla congiungente i centri O e O' che tagli una circonferenza nei punti A e D e l'altra nei punti B e C. Dimostrare che AB=CD.

Ipotesi: c=c'; OO' ⊥ BC; **Tesi:** AB=CD



Dimostrazione:

- Si unisca O con B e C; O' con A e D: si hanno due triangoli isosceli dove l'altezza è perpendicolare alla base per ipotesi.

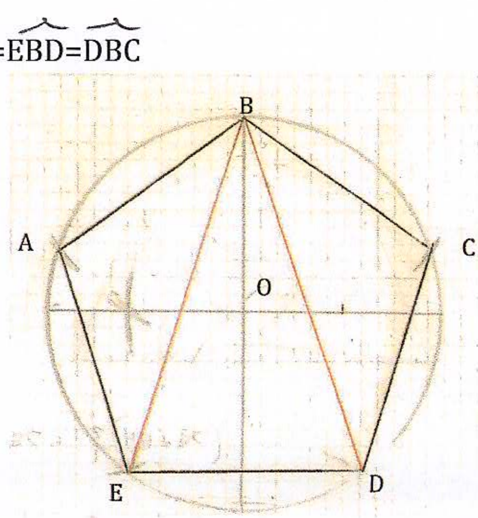
- Nel triangolo isoscele l'altezza relativa alla base è anche mediana: AH=HD e BH=HC.

- Per differenza di segmenti eguali AB=CD. C.v.d.

11) Dimostrare che le diagonali condotte da uno dei vertici di un pentagono regolare dividono l'angolo in tre parti eguali.

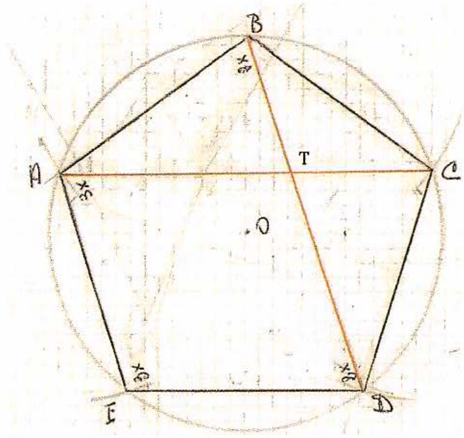
Ipotesi: ABCDE pentagono regolare inscritto. **Tesi:** ABE=EBD=DBC

Dimostrazione:



ABE=EBD=DBC sono tre angoli alla stessa circonferenza che insistono sugli stessi archi, sottesi dalle stesse corde per ipotesi. Per il teorema che dice che in circonferenze eguali o nella stessa circonferenza angoli alla circonferenza eguali insistono su archi eguali e viceversa, i tre angoli non possono che risultare eguali. C.v.d.

12) Dimostrare che se due diagonali di un pentagono regolare s'intersecano, la parte maggiore di ciascuna di esse è eguale al lato del pentagono stesso.



Ipotesi: ABCDE pentagono regolare. **Tesi:** $\overline{AE}=\overline{TD}$

Dimostrazione:

- Per il problema precedente, si sa che le diagonali di un pentagono regolare dividono i suoi angoli in tre parti eguali.

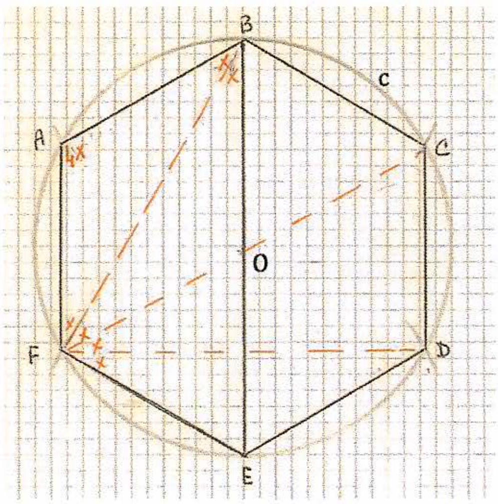
- Si dia un valore letterale, x, a ciascuna di queste parti; perciò $\widehat{ABD}=2x$, $\widehat{BDE}=2x$, $\widehat{BAE}=3x$; $\widehat{AED}=3x$.

- In un quadrilatero, nello specifico ABDE, gli angoli opposti, AED e ABD, sono supplementari, ossia $2x+3x=180°$.

- Anche $\widehat{EAB}+\widehat{ABD}$ sono perciò supplementari ($2x+3x$), perciò $\overline{AE}//\overline{BD}$, considerando $\widehat{EAB}$ e $\widehat{ABD}$ coniugati interni delle rette AE e BD tagliate da AB. E per le stesse ragioni $\overline{AC}//\overline{ED}$.

- Il quadrilatero EATD è dunque un parallelogrammo con lati opposti paralleli ed eguali: $\overline{AE}=\overline{TD}$.
C.v.d.

13) Dimostrare che in un esagono regolare una diagonale, se è anche diametro, divide l'esagono in due trapezi isosceli eguali.



Ipotesi: ABCDEF esagono regolare inscritto in c.

Tesi: ABEF trapezio isoscele

Dimostrazione:

- Si consideri che le diagonali in un poligono regolare inscritto in una circonferenza, proprio perché insistono su archi eguali determinano angoli eguali.

- ABCDEF come esagono regolare inscritto in c, ha gli angoli divisi da tre diagonali in quattro angoli eguali.

- Si dia il valore x generico a ognuno di questi angoli.

- $\widehat{ABE}=2x$; $\widehat{AFE}=4x$. I due angoli sono supplementari perché opposti nel quadrilatero ABEF inscritto in c.

- $\widehat{A}=4x$, perciò supplementare come $\widehat{AFE}$, con $\widehat{ABE}$. I due angoli allora sono coniugati interni sulle rette AF e BE tagliate da AB. Dunque $\overline{AF}//\overline{BE}$.

- $\overline{FE}=\overline{AB}$ per ipotesi; ed $\widehat{FEB}=\widehat{ABE}$ (2x entrambi).

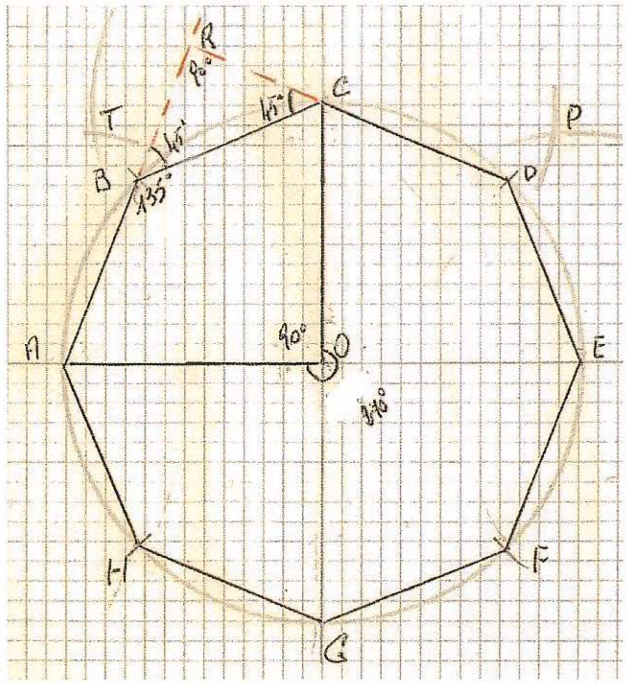
- ABEF è dunque un trapezio isoscele e lo stesso vale per EBCD. C.v.d.

14) Dimostrare che prolungando i lati AB e DC di un ottagono regolare fino a incontrarsi in un punto R, il quadrilatero AOCR, essendo O il centro della circonferenza circoscritta all'ottagono, è inscrittibile in una circonferenza.

Ipotesi: ABCDEFGH ottagono regolare

Tesi: AOCR inscrittibile in una circonferenza

Dimostrazione:



- Si consideri l'arco di circonferenza su cui insiste l'angolo ABC che è la metà del corrispondente angolo al centro concavo eguale a 270°, essendo il convesso 90°.

- $\widehat{ABC}$ è dunque di 135°; l'angolo adiacente $\widehat{RBC}$=45°; così pure $\widehat{RCB}$ per le stesse ragioni.
- Il triangolo BRC è dunque un triangolo isoscele rettangolo con $\widehat{R}$=90°.

- Con angoli opposti supplementari (90°+90°) il quadrilatero AOCR risulta inscrittibile in una circonferenza.

C.v.d.