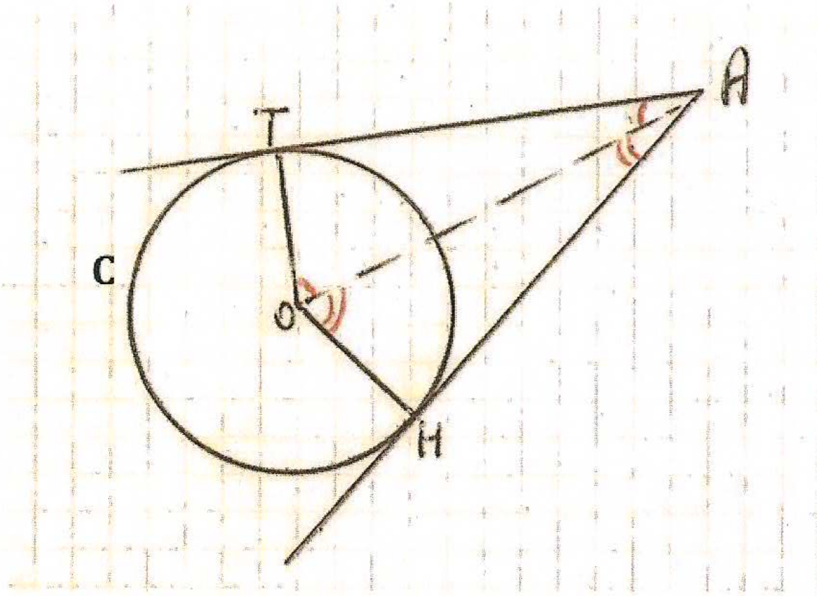
ESERCIZI LEZIONE 7

1) Dimostrare che l'angolo formato dalle tangenti a una circonferenza condotte da un piano esterno è supplementare dell'angolo al centro i cui lati passano per i punti di contatto.

Ipotesi: AT e AH tangenti a C

Tesi: $\widehat{TAH} + \widehat{TOH} = 180°$



Dimostrazione:

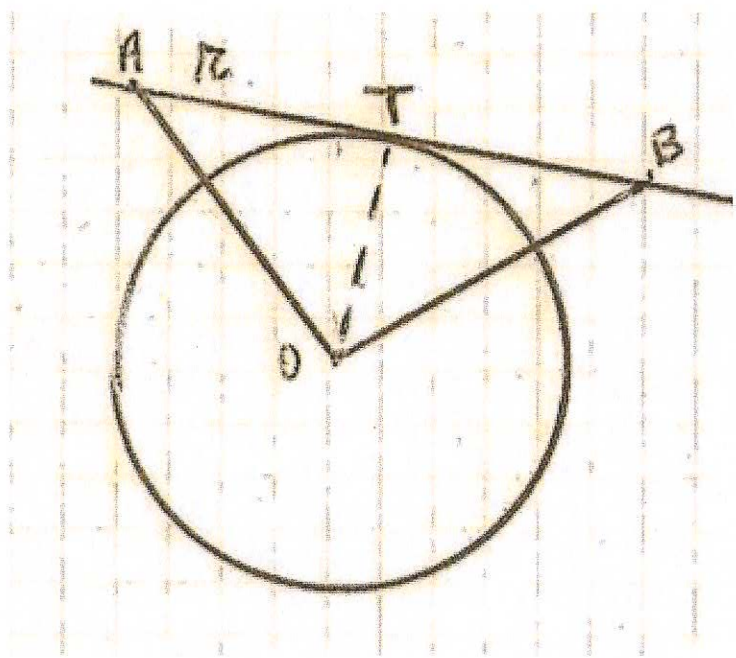
- Si congiunga A con O e si considerino i triangoli rettangoli TAO e HOA che sono evidentemente eguali.
- $\widehat{TAO} + \widehat{TOA} = 90°$; $\widehat{OAH} + \widehat{AOH} = 90°$.
- Sommando membro a membro: $\widehat{TAH} + \widehat{TOH} = 180°$.

C.v.d.

2) Condotta la tangente r in un punto T di una circonferenza di centro O, siano A e B due punti della tangente equidistanti da T. Dimostrare che il triangolo AOB è isoscele

Ipotesi: $\overline{AT}=\overline{TB}$; r tangente a T

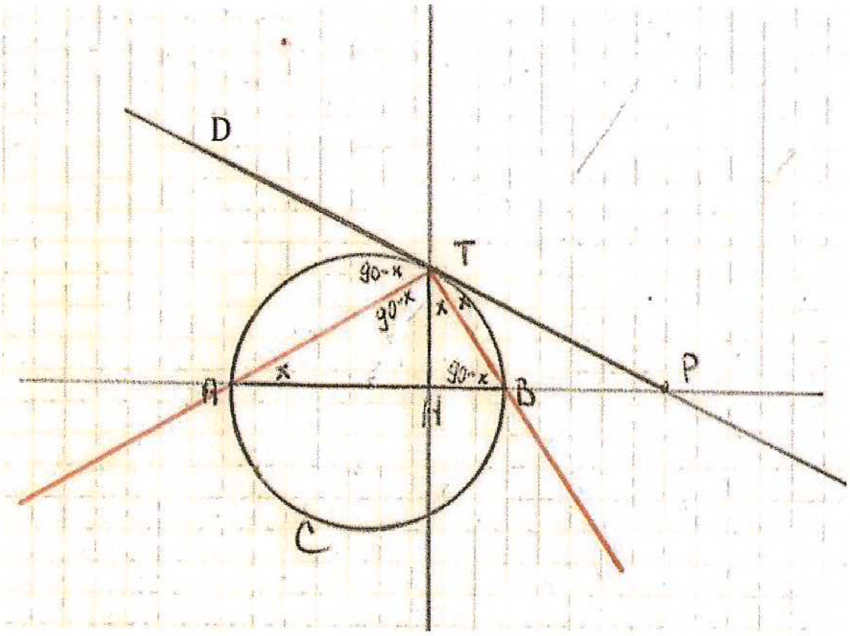
Tesi: $\overline{AO}=\overline{OB}$



Dimostrazione:

- Si considerino i triangoli ATO e BTO, sono eguali per il primo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\overline{TO}$ in comune; $\overline{AT}=\overline{TB}$; $\widehat{ATO}=\widehat{BTO}=90°$.
- In particolare $\overline{AO}=\overline{OB}$: C.v.d.

3) E' dato un cerchio di diametro AB. Dal punto P della retta AB, esterno al cerchio, si conduca una tangente PT alla circonferenza e sia H la proiezione del punto T di tangenza su AB. Dimostrare che TA e TB sono le bisettrici degli angoli formati dalle rette TP e TH.



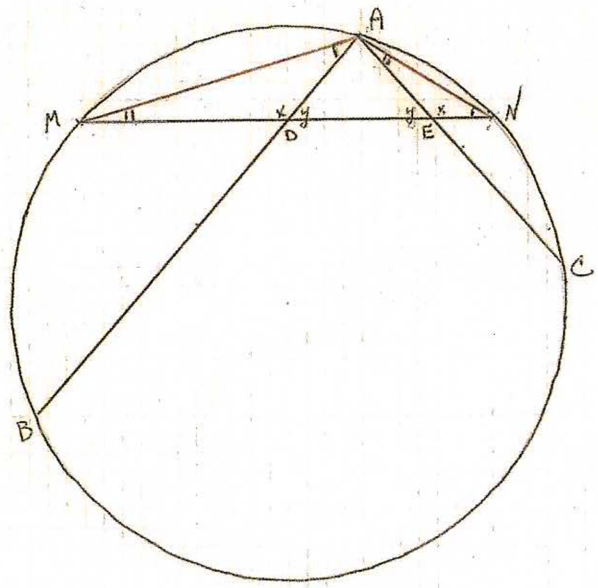
Ipotesi: PT tangente a C
$TH \perp AB$

Tesi: $\widehat{DTA}=\widehat{ATH}$; $\widehat{HTB}=\widehat{BTP}$

Dimostrazione:

- Si assegnino dei valori letterari agli angoli.
- ATB triangolo rettangolo in T perché angolo alla circonferenza che ha come base il diametro di C. TAB = x; TBA = 90-x.
- Si consideri il triangolo rettangolo per costruzione $\widehat{HTB}$: $\widehat{HTB}$ = x.
- Sull'arco TB insiste sia l'angolo alla circonferenza $\widehat{TAB}$ = x, sia l'angolo alla circonferenza $\widehat{BTP}$ = x. Ma anche $\widehat{HTB}$ = x. Dunque $\widehat{HTB}=\widehat{BTP}$.
- Sull'arco AT insiste sia l'angolo alla circonferenza $\widehat{TBA}$ = 90-x, sia l'angolo alla circonferenza $\widehat{DTA}$ = 90-x. Ma anche $\widehat{ATH}$ = 90- x. Dunque $\widehat{DTA}=\widehat{ATH}$. C.v.d.

4) Se M e N sono i punti medi di due archi AB e AC di una circonferenza e la corda MN taglia le corde AB in D e AC in E, dimostrare che $\overline{AD}=\overline{AE}$.



Ipotesi: $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MB}$; $\overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{NC}$

Tesi: $\overline{AD}=\overline{AE}$

Dimostrazione:

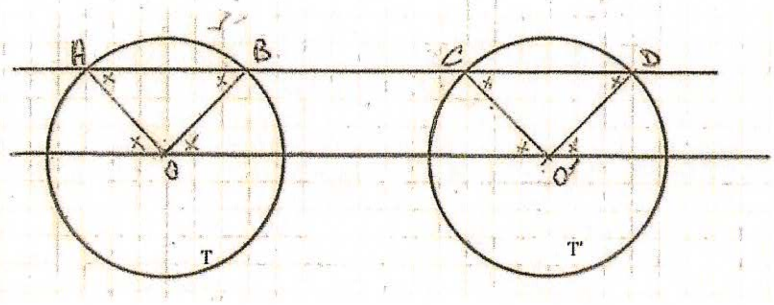
- Si congiunga A con M e con N.
- $\widehat{AMN}=\widehat{NAC}$ perché entrambi angoli alla circonferenza che insistono su archi di circonferenza eguali: $\overset{\frown}{AN}$ e $\overset{\frown}{NC}$ per ipotesi.
- $\widehat{ANM}=\widehat{MAB}$ perché entrambi angoli alla circonferenza che insistono su archi di circonferenza eguali: $\overset{\frown}{AM}$ e $\overset{\frown}{MB}$ per ipotesi.
- Si considerino i triangoli MAD e ANE: per le eguaglianze precedenti hanno due angoli eguali, di conseguenza per differenza di angoli eguali, il terzo angolo risulterà eguale: $\widehat{ADM}=\widehat{AEN}$.

- Gli angoli suddetti però sono gli angoli adiacenti alla base DE del triangolo ADE che dunque avrà gli angoli alla base interni eguali perché supplementari. Così anche $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{AE}$. C.v.d.

5) Due circonferenze T e T' di centro O e O' sono eguali. Una retta secante parallela a OO' taglia la prima di esse nei punti A e B e l'altra nei punti C e D. Dimostrare che OO'CA e OO'DB sono parallelogrammi.

Ipotesi: T=T' (1)

AD // OO' (2)

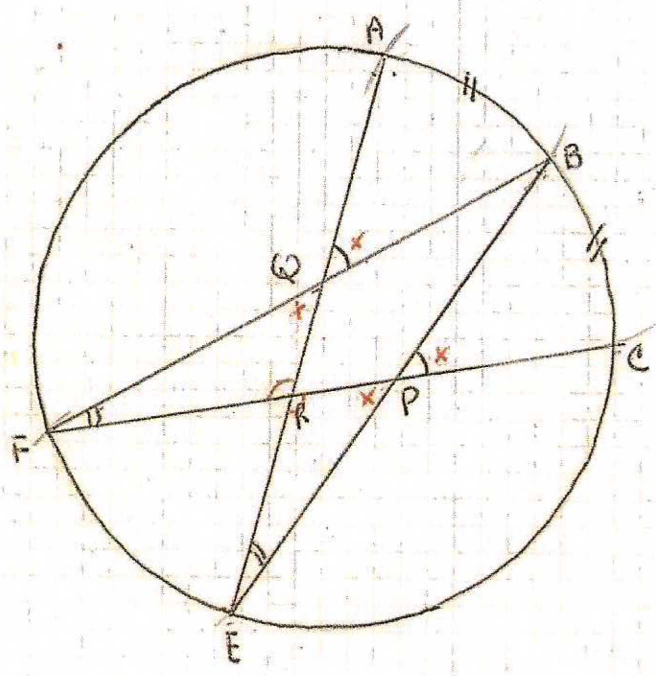


Tesi: OO'CA e OO'DB parallelogrammi

Dimostrazione:

- Si considerino i triangoli isosceli ABO e CO'D perché con lati obliqui eguali: $\widehat{OAB}=\widehat{ABO}$ e $\widehat{O'CD}=\widehat{CDO'}$.
- Si considerino poi gli angoli alterni interni determinati dalle parallele secate dai raggi nelle singole circonferenze.
- Queste eguaglianze su T e T' sono collegate tra loro dal trapezio isoscele BCO'O, isoscele per avere la base minore e maggiore parallele per la (2) e i lati obliqui eguali per la (1).
- Così $\widehat{CO'O}=\widehat{OAC}$ e poi $\widehat{ACO'}=\widehat{AOO'}$ perché supplementari di angoli eguali. Il quadrilatero OO'CA è dunque un parallelogrammo per avere gli angoli opposti eguali e in più due lati paralleli per costruzione.
- Lo stesso procedimento vale per il secondo parallelogrammo. C.v.d.

6) Se per gli estremi di due archi eguali e consecutivi $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{BC}$ di una circonferenza si conducono quattro semirette AE, BE, BF, CF passanti per gli estremi di un altro arco $\overset{\frown}{EF}$ (si assegnino le lettere A, B, C, E, F in giusta successione lungo la circonferenza) della circonferenza stessa e che s'incontrino dalla parte di A e B nei punti P e Q, gli angoli AQB e BPC sono eguali.



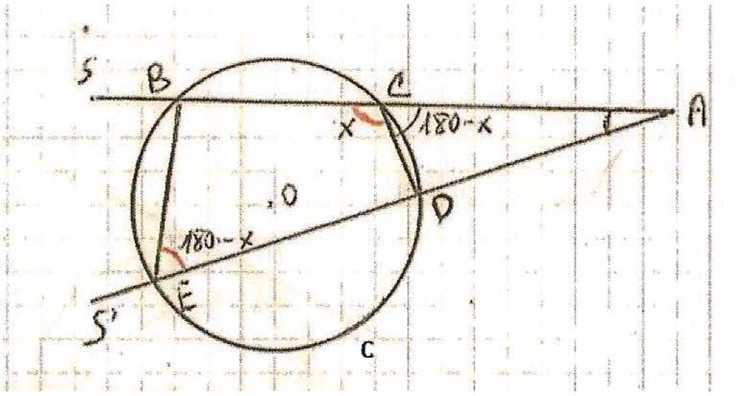
Ipotesi: $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$

Tesi: $\widehat{AQB} = \widehat{BPC}$

Dimostrazione:

Si segni con la lettera R l'incontro delle semirette dalla parte di FE e si considerino i triangoli FQR e EPR: $\widehat{F}=\widehat{E}$ perché insistono su archi eguali; $\widehat{QRF}=\widehat{PRE}$ perché opposti al vertice. Per differenza di angoli eguali anche $\widehat{FQR}=\widehat{RPE}$ che sono però opposti al vertice di $\widehat{AQB}$ e $\widehat{BPC}$ che per la proprietà transitiva risultano eguali. C.v.d.

7) Se da un punto A esterno a una circonferenza si conducono due secanti s e s' che incontrano la circonferenza rispettivamente nei punti B, C, D ,E dimostrare che i triangopli ABE e ADC hanno gli angoli rispettivamente eguali.

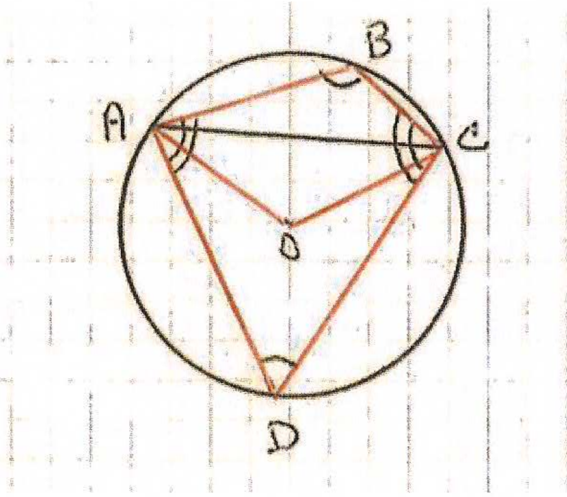


Ipotesi: s e s' secanti di c

Tesi: $\widehat{DCA}=\widehat{BEA}$; $\widehat{CDA}=\widehat{EBA}$

Dimostrazione:

- Si dimostra che un quadrilatero iscritto in una circonferenza ha angoli opposti supplementari.
- Si consideri nella seconda figura il quadrilatero ABCD. Gli angoli alla circonferenza ABC e ADC insistono sugli archi opposti ABC e ADC sottesi dalla stessa corda AC.
- I due angoli al centro dei due angoli alla circonferenza suddetti danno come risultante un angolo giro.
- Si sa però che gli angoli al centro sono il doppio dei rispettivi angoli alla circonferenza. Perciò $\widehat{ABC}+\widehat{ADC}$ = 1p=180°.
- Si consideri ora nella prima figura il quadrilatero BCDE: $\widehat{BCD}$ e $\widehat{BED}$ sono supplementari per la dimostrazione precedente.
- Anche $\widehat{DCA}$ è supplementare a $\widehat{BCD}$, perciò per la proprietà transitiva anche $\widehat{DCA}=\widehat{BEA}$.
- Con lo stesso procedimento o per sottrazione di angoli eguali, visto che l'angolo A è in comune, si conclude che anche $\widehat{CDA}=\widehat{EBA}$. C.v.d.

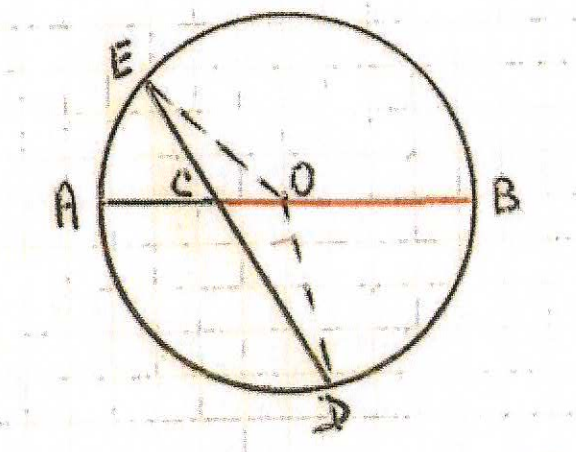


8) Dimostrare che se si conduce una corda di una circonferenza che taglia un diametro in un punto diverso dal centro, la parte del diametro che contiene il centro è maggiore, e quella che non lo contiene è minore di ciascuna delle parti in cui è rimasta divisa la corda.

Ipotesi: Una corda che seca un diametro non passando dal centro. E D

Tesi: $\overline{EC}>\overline{AC}$; $\overline{CD}>\overline{AC}$; $\overline{EC}<\overline{CB}$; $\overline{CD}<\overline{CB}$

Dimostrazione:

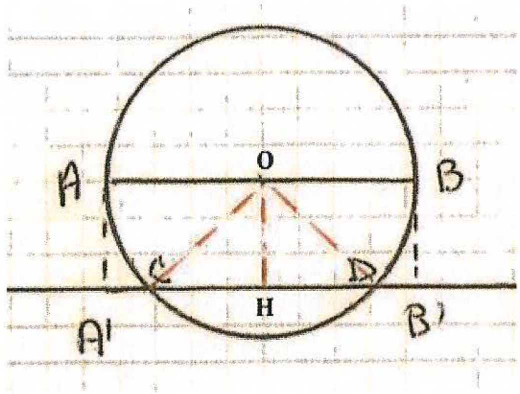


- Si consideri il ruolo strategico di $\overline{CO}$: se a $\overline{CO}$ si aggiunge il raggio si ha $\overline{CB}$; se al raggio si toglie $\overline{CO}$ si ha $\overline{AC}$.
- Si consideri il triangolo ECO e i due teoremi che

dicono che in un triangolo un lato è sempre minore della somma degli altri due ed è sempre maggiore della loro differenza.

- EC<CO+EO (=OB); EC<CB
- EC>EO (=OA)-OC; EC>AC
- Lo stesso vale per l'altro pezzo di corda e il triangolo COD. C.v.d.

9) Se A'B' è la proiezione di un diametro AB sopra una retta secante e parallela al diametro che tagli una circonferenza in C e D, dimostrare che A'C=B'D.



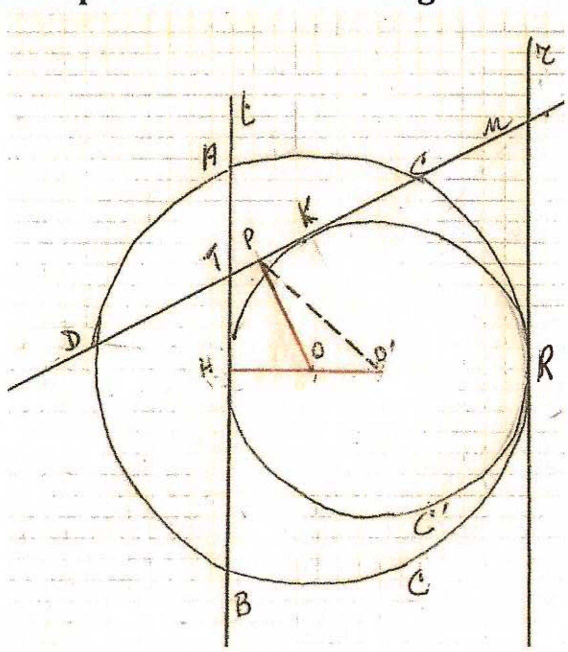
Ipotesi: AB // A'B'
AA'C=BB'D=90°

Tesi: A'C=B'D

Dimostrazione:

- Si proietti il centro O su A'B' in H: A'H=B'H perché AO=OB e AOHA' e BOHB' come parallelogrammi hanno i lati opposti eguali.
- COD è un triangolo isoscele, avendo per lati i raggi del cerchio. Nel triangolo isoscele però l'altezza relativa alla base è anche mediana, dunque CH=HD.
- Per differenza di segmenti eguali A'C=B'D. C.v.d.

10) Date due circonferenze tangenti internamente, dimostrare che tra tutte le corde tangenti alla circonferenza interna, la maggiore è quella parallela alla retta tangente alle due circonferenze nel punto di contatto.



Ipotesi:
c, c', r tangenti in R
t//r
t e n tangenti con c'

Tesi: AB>DC

Dimostrazione:

- Per dimostrare in un cerchio che una corda è maggiore dell'altra può aiutare il teorema che dice che una corda maggiore dista dal centro di una circonferenza una lunghezza minore di una corda minore.
- Le distanze dal centro O delle corde AB e DC sono rispettivamente OH e OP. Bisogna dimostrare che **PO>HO**.
- Se si considera il triangolo POO', per il teorema che dice che un lato di un triangolo è sempre maggiore della differenza degli altri due: PO>PO'-OO'.
- Ma PO'>O'H perché fuoriesce dalla circonferenza C' ed è maggiore del raggio.
- A maggior ragione dunque è valida la disequazione PO>HO'-OO'.
- Ma HO'-OO'=HO. Perciò **PO>HO.** C.v.d.