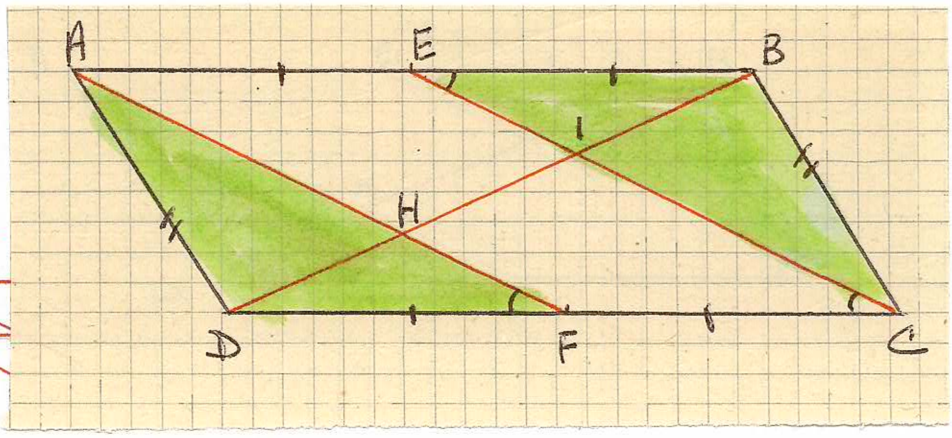
ESERCIZI V LEZIONE

1) Dato il parallelogrammo ABCD, si congiungano i punti medi E e F dei lati AB e CD rispettivamente con i vertici C e A. Dimostrare che le predette congiungenti dividono la diagonale BD in tre segmenti eguali.



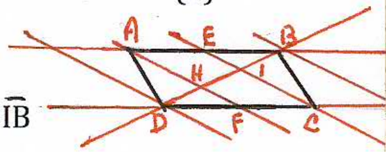
Ipotesi:

AB//DC; AD//BC. (1)

$\overline{AB}=\overline{DC}$; $\overline{AD}=\overline{BC}$. (1)

$\widehat{A}=\widehat{C}$; $\widehat{B}=\widehat{D}$. (1)

$\overline{AE}=\overline{EB}=\overline{DF}=\overline{FC}$ (2)



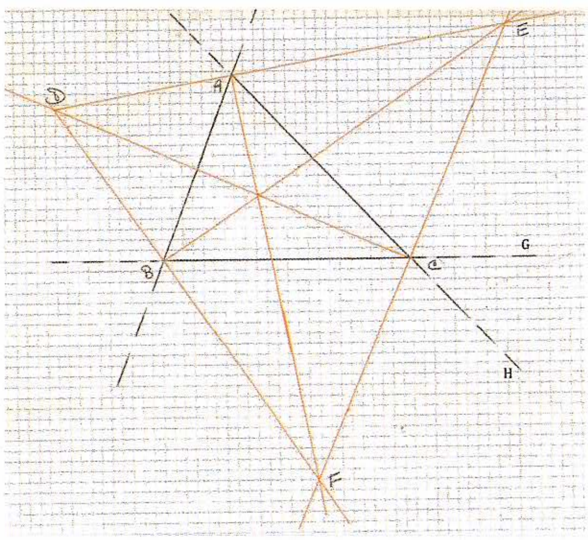
Tesi:

$\overline{DH}=\overline{HI}=\overline{IB}$

Dimostrazione:

- $\widehat{EBC}=\widehat{FDA}$ per il primo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\overline{AD}=\overline{BC}$ e $\widehat{D}=\widehat{B}$ per la (1); $\overline{DF}=\overline{EB}$ per la (2). In particolare $\widehat{AFD}=\widehat{CEB}$. (3)
- $\widehat{CEB}=\widehat{ECD}$ perché alterni interni delle parallele AB e DC tagliate da EC. (4)
- $\widehat{AFD}=\widehat{ECD}$ per la proprietà transitiva applicata alla (3) e alla (4). (5)
- Se $\widehat{AFD}=\widehat{ECD}$, poichè corrispondenti delle rette EC e AF tagliate da DC ci dicono che EC//AF. (6)
- Se si considerano le parallele EC e AF tagliate da AB e BD, a segmenti eguali su $\overline{AB}$ corrispondono segmenti eguali su $\overline{BD}$. Perciò $\overline{BI}=\overline{IH}$. (7)
- Se si considerano le parallele EC e AF tagliate da DC e BD, a segmenti eguali su DC corrispondono segmenti eguali su BD. Perciò $\overline{HD}=\overline{IH}$. (8)
- Per la proprietà transitiva applicata alla (7) e alla (8), $\overline{HD}=\overline{IH}=\overline{BI}$. C.v.d.

2) Dimostrare che i tre excentri di un triangolo determinano un altro triangolo i cui lati passano per i vertici del triangolo dato.



Ipotesi:

D, E, F excentri (con tutte le proprietà annesse)

Tesi:

$\overline{DE}$ per A; $\overline{EF}$ per C; $\overline{FD}$ per B

Dimostrazione:

- Le bisettrici CE e CF degli angoli esterni ACG e BCH del triangolo ABC, si trovano giacenti sulla stessa retta perché bisettrici di angoli opposti al vertice.
- FE unisce gli excentri F ed E, vertici del triangolo DEF costruito.

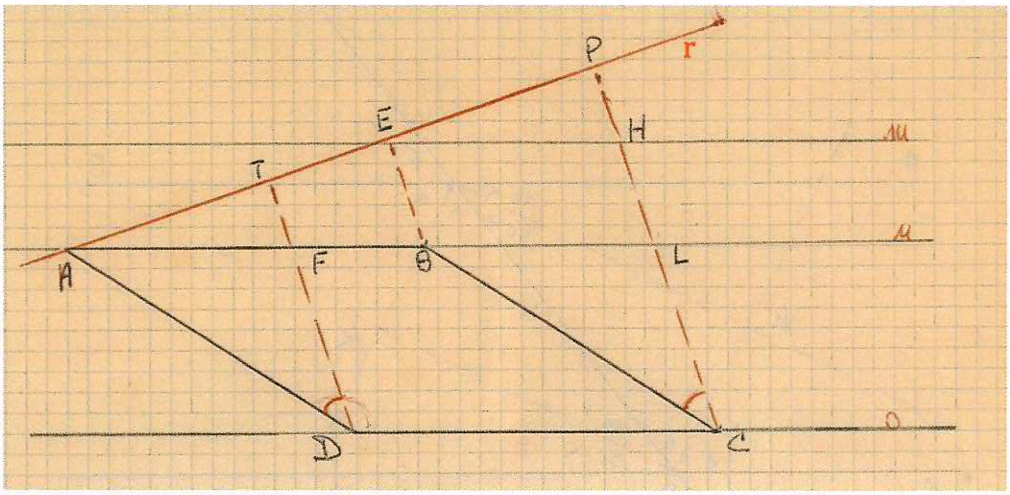
Lo stesso ragionamento vale per gli altri due angoli. C.v.d.

3) Dato il parallelogrammo ABCD, condurre per il vertice A una retta qualunque r che non tagli il parallelogrammo stesso. Dimostrare che la distanza CP del vertice C dalla retta r è eguale alla somma delle distanze BE e DT di B e D dalla stessa retta r.

Ipotesi: DT, EB, CP $\perp$ r
ABCD parallelogrammo con tutte le sue proprietà

Tesi: $\overline{PC}=\overline{EB}+\overline{TD}$

Dimostrazione:

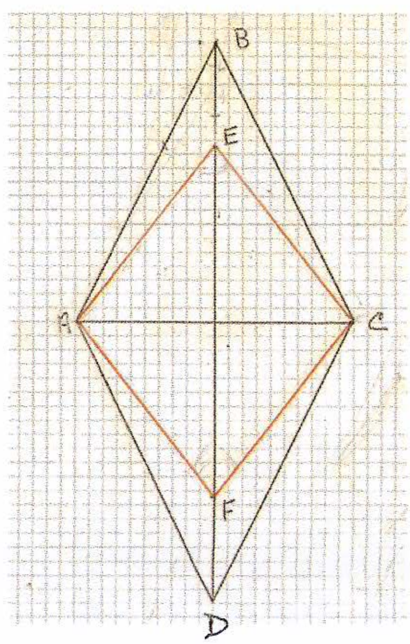


- Si tracci la parallela ad $\overline{AB}$ per E : EH.
- Si consideri il parallelogrammo DFLC, parallele $\overline{TD}$ e $\overline{PC}$ perché perpendicolari alla stessa retta r: $\overline{FD}=\overline{LC}$.
- Si consideri il parallelogrammo EHLB: $\overline{HL}=\overline{EB}$.
- Se si riesce a dimostrare che anche $\overline{TF}=\overline{PH}$, per somma di segmenti eguali, la tesi è soddisfatta.
- I triangoli AFD e BCL sono eguali per il primo criterio d'eguaglianza: $\overline{AD}=\overline{BC}$ e $\overline{FD}=\overline{LC}$ perché lati opposti di parallelogrammi; $\widehat{FDA}=\widehat{LCB}$ perché angoli con lati paralleli e concordi. In particolare $\overline{AF}=\overline{BL}$.
- I triangoli ATF=HEP per il secondo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\overline{AF}=\overline{BL}$; $\widehat{PEH}=\widehat{TAF}$ perché corrispondenti dalle parallele m e n tagliate dalla trasversale r; $\widehat{P}$ e $\widehat{T}$ angoli retti per ipotesi. In particolare $\overline{TF}=\overline{PH}$. C.v.d.

4) Dimostrare che se si congiungono due punti di una diagonale di un rombo a eguale distanza dagli estremi, con gli estremi dell'altra diagonale, si ottiene un rombo.

Ipotesi: $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}$ (1)
AB//CD; BC//AD (2)
$\widehat{ABC}=\widehat{ADC}$; $\widehat{BAD}=\widehat{BCD}$ (3)
$\overline{BE}=\overline{FD}$ (4)

Tesi: $\overline{AE}=\overline{EC}=\overline{CF}=\overline{FA}$
$\widehat{AEC}=\widehat{AFC}$; $\widehat{EAF}=\widehat{ECF}$

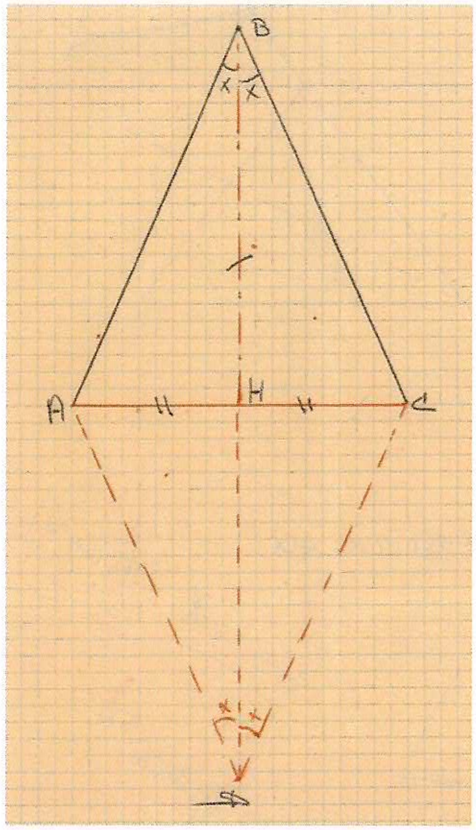


Dimostrazione:

- BEA=BEC=AFD=CFD per il primo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\overline{BE}=\overline{FD}$ per la (4); $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}$ per la (1); $\widehat{ABE}=\widehat{EBC}=\widehat{FDC}=\widehat{FDA}$ per la (3). In particolare $\overline{AE}=\overline{EC}=\overline{CF}=\overline{FA}$. (5)
- $\widehat{AEC}=\widehat{ACF}$ per il terzo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\overline{AC}$ in comune; $\overline{AE}=\overline{EC}=\overline{CF}=\overline{FA}$ per la (5). In particolare $\widehat{AEC}=\widehat{AFC}$.

Con quattro lati eguali e due angoli opposti eguali AECF è rombo. C.v.d.

5) Dimostrare che un triangolo è isoscele se la mediana e la bisettrice relative a uno stesso lato coincidono.



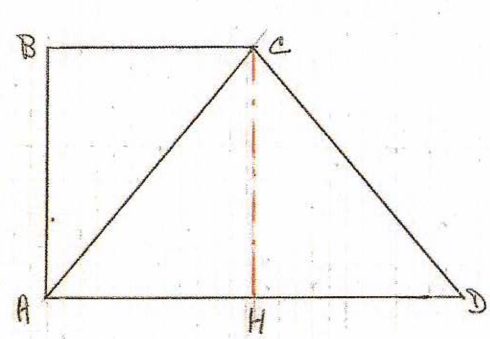
Ipotesi: $\widehat{ABH}=\widehat{HBC}$ (1)
$\overline{AH}=\overline{HC}$ (2)

Tesi: $\overline{AB}=\overline{BC}$

Dimostrazione:

- Si prolunghi $\overline{BH}$ di un segmento $\overline{HD}=\overline{BH}$ e si uniscano A e C con D. (3)
- $\widehat{BHC}=\widehat{AHD}$ per il primo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\widehat{AHC}=\widehat{AHD}$ opposti al vertice; $\overline{AH}=\overline{HC}$ per la (2); $\overline{HD}=\overline{BH}$ per la (3). In particolare $\overline{BC}=\overline{AD}$ e $\widehat{HBC}=\widehat{HDA}$.
- Se i lati opposti AD e BC del quadrilatero ABCD sono eguali e anche paralleli poiché le rette BC e AD tagliate dalla trasversale BD determinano angoli alterni interni eguali $\widehat{HBC}=\widehat{HDA}$, il quadrilatero è un parallelogrammo. Perciò anche $\overline{AB}=//\overline{CD}$.
- Per la proprietà transitiva $\widehat{HBC}=\widehat{HDC}$ e di conseguenza $\overline{BC}=\overline{CD}$ e $\overline{AB}=\overline{AD}$. IL parallelogrammo è anche rombo e viene così soddisfatta la tesi AB=BC. C.v.d.

6) Dimostrare che se un trapezio rettangolo ha la diagonale minore eguale al lato obliquo, la base maggiore è il doppio della minore.



Ipotesi:

$\overline{BC}//\overline{AD}$ (1)
$\widehat{A}=\widehat{B}=90°$ (2)
$\overline{AC}=\overline{CD}$ (3)

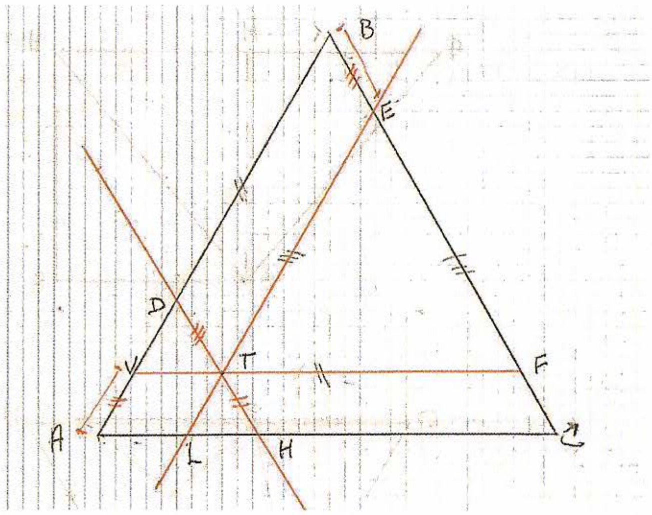
Tesi: $\overline{AD}=2\overline{BC}$

Dimostrazione:

- Si tracci l'altezza $\overline{CH}$ relativa al lato $\overline{AD}$ del triangolo isoscele ACD per la (3), dove l'altezza relativa alla base è allo stesso tempo mediana e bisettrice. Perciò $\overline{AH}$=HD. (4)

- $\widehat{ABC}=\widehat{ACH}$ per il primo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\overline{AC}$ in comune; $\overline{BA}=\overline{CH}$ perché distanze tra due rette parallele; $\widehat{BCA}=\widehat{CAH}$ perché alterni interni di BC e AH tagliate dalla trasversale AC. In particolare $\overline{BC}=\overline{AH}$.
- Per la (4) e per la proprietà transitiva $\overline{AH}=\overline{HD}=\overline{BC}$ >> $\overline{AD}=2\overline{BC}$. C.v.d.

7) Dimostrare che, se per un punto interno a un triangolo equilatero si conducono tre corde parallele ai lati, la somma delle tre corde è eguale al doppio del lato.



Ipotesi: $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}$ (1)
$\widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{C}$ (2)
VF//AC; LE//AB; DH//BC (3)

Tesi: $\overline{LE}+\overline{VF}+\overline{DH} = \overline{AB}+\overline{BC}$

Dimostrazione:

- si consideri che tutti i triangoli che si sono formati sono equilateri per avere gli angoli corrispondenti agli angoli di $\widehat{ABC}$.
- Da cui: $\overline{LE}=\overline{EC}$, $\overline{VF}=\overline{VB}$.
- Rimangono fuori dall'eguaglianza richiesta dalla tesi da una parte $\overline{BE}$ e $\overline{AV}$, dall'altra $\overline{DH}$.
- $\overline{DH}$ può essere scomposto in $\overline{DT}$ e $\overline{TH}$. $\overline{DT}=\overline{BE}$ perché lati opposti e paralleli del parallelogrammo BETD; $\overline{TH}=\overline{AV}$ perché lati obliqui del trapezio isoscele VTHA, isoscele per avere gli angoli alla base eguali ($\widehat{H}$ corrispondente a $\widehat{C}=\widehat{A}$).
- Se ne conclude: $\overline{LE}+\overline{VF}+\overline{DH} = \overline{AB}+\overline{BC}$. C.v.d.