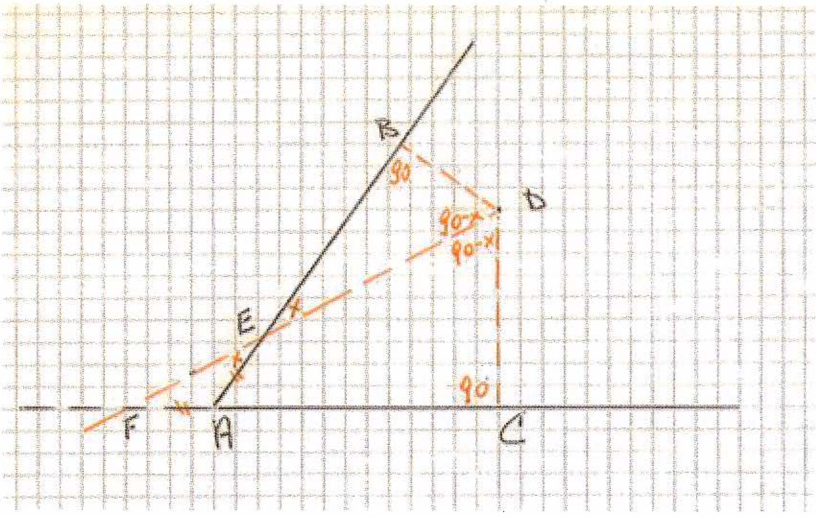
ESERCIZI DELLA QUARTA LEZIONE

1) Se D è un punto interno a un angolo acutoBAC, e DB e DC sono le perpendicolari ai lati dell'angolo condotto per D, la bisettrice DF dell'angolo CDB incontra un lato dell'angolo e il prolungamento dell'altro in due punti E e F che si deve dimostrare che sono equidistanti dal vertice.



Ipotesi: $DB \perp AB$; $DC \perp AC$

$\widehat{BDF}=\widehat{CDF}$

Tesi: $\overline{FA}=\overline{EA}$

Dimostrazione:

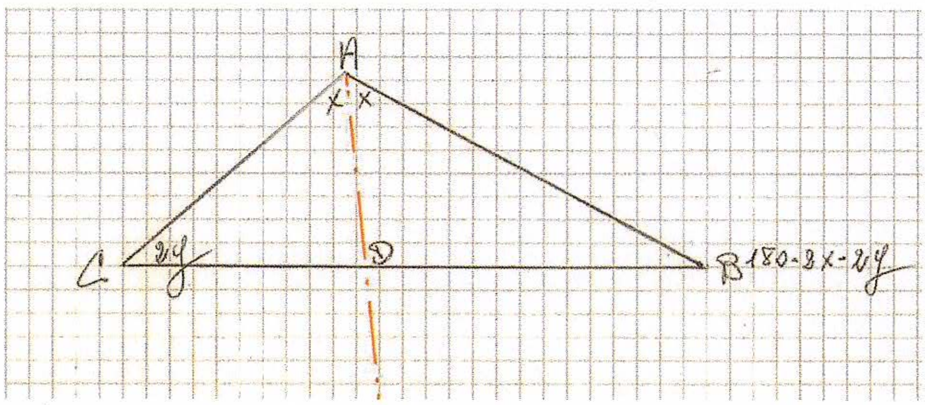
- Si segni con x l'angolo FEA e il suo opposto al vertice $\widehat{BED}$.

- Si consideri il triangolo rettangolo EBD: un angolo è x, l'altro è 90°, il terzo 90-x perché la somma interna degli angoli di un triangolo è 180°.

- Si proceda nello stesso modo con il triangolo FDC: C=90°; $\widehat{FDC}=\widehat{BDF}$=90-x. L'angolo in F sarà dunque eguale a x.

- Se però il triangolo FAE ha i due angoli alla base eguali, vuol dire che è un triangolo isoscele e che $\overline{FA}=\overline{EA}$. C.v.d.

2) In un triangolo scalenoABC sia AB>AC e AD la bisettrice dell'angolo BAC. Dimostrare che: ADB-ADC=C-B.



Ipotesi:

$\overline{AB}>\overline{AC}$ (1)

CAD=DAB (2)

Tesi: $\widehat{ADB}-\widehat{ADC}=\widehat{C}-\widehat{B}$. (3)

Dimostrazione:

- Si assegnino dei valori letterari agli angoli del triangolo: $\widehat{A}$=2x; $\widehat{C}$=2y; $\widehat{B}$=180°-2x-2y.
- In riferimento ai valori precedenti, definire in x e in y, $\widehat{ADC}$ e $\widehat{ADB}$:

$\widehat{ADC}$=180°-x-2y; $\widehat{ADB}$=180-x-(180-2x-2y)

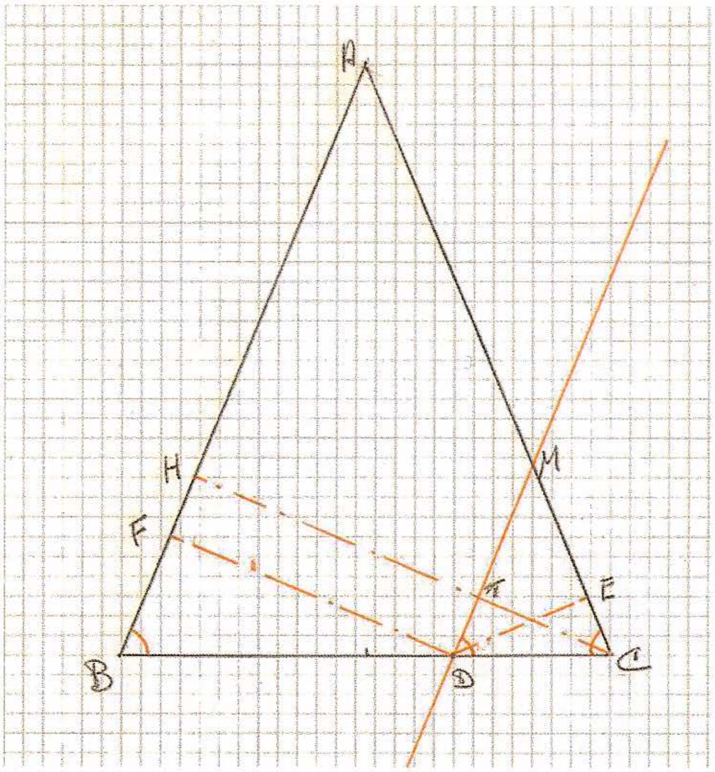
- Si sostituiscano questi valori nella (3):

180-x-(180-2x-2y)-(180°-x-2y) = 2y-(180°-2x-2y)

$\cancel{180}$ - $\cancel{x}$ -$\cancel{180}$ + 2x + 2y - $\cancel{180}$ + $\cancel{x}$ + 2y= 2y -$\cancel{180}$ + 2x + 2y

2x + 4y = 2x + 4y C.v.d.

3) Dimostrare che la somma delle distanze di un punto qualunque della base di un triangolo isoscele dai lati è egule all'altezza relativa a uno di questi lati eguali.



Ipotesi:

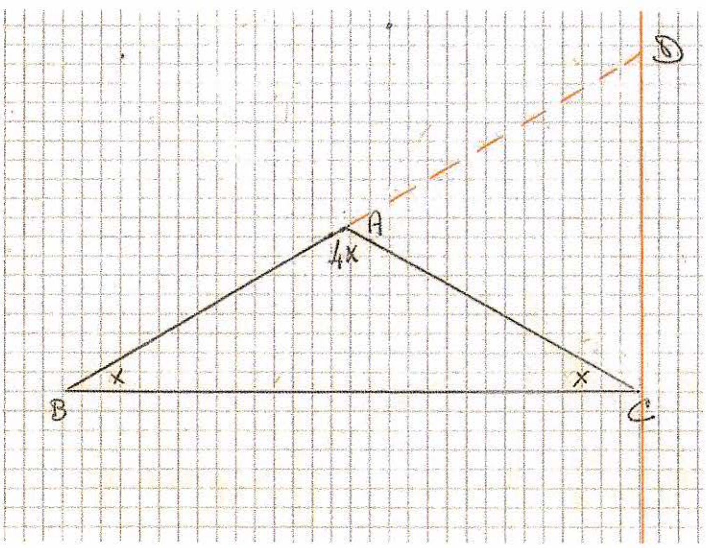
DF ⊥ AB; DE ⊥ AC $\overline{AB}=\overline{AC}$ e $\hat{B}=\hat{C}$

Tesi: $\overline{DF}+\overline{DE}=\overline{CH}$

Dimostrazione:

- Si tracci da C l'altezza CH relativa al lato AB;
- Si tracci da D la parallela ad AB, DM;
- Si scomponga il segmento HC in $\overline{HT}+\overline{TC}$;
- $\overline{HT}=\overline{FD}$, perché entrambe cadendo perpendicolarmente su $\overline{BA}$ ne determinano la stessa distanza da DM // AB per costruzione.
- I triangoli TDC e EDC sono eguali per il secondo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\overline{DC}$ in comune; $\hat{T}=\hat{E}=90°$ per ipotesi e costruzione; $\widehat{TDC}=\hat{B}$ perché corrispondenti delle parallele AB e DM tagliate dalla trasversale BC. però B=C=TDC per la propietà transitiva.
- Risulta $\overline{DE}=\overline{TC}$.
- Perciò $\overline{DF}+\overline{DE}=\overline{CH}$. C.v.d.

4) In un triangolo isoscele ABC, ciascun angolo alla base è la quarta parte dell'angolo al vertice. Tracciare per uno dei vertici della base, per esempio C, la perpendicolare alla base BC che interseca il prolungamento di BA in D. Dimostrare che il triangolo CAD è equilatero.



Ipotesi:

$\hat{B}$ e $\hat{C}$ = ¼ $\hat{A}$ $\hat{B}=\hat{C}$; $\overline{AB}=\overline{AC}$

DC ⊥ BC

Tesi: $\widehat{ACD}=\widehat{CDA}=\widehat{DAC}$

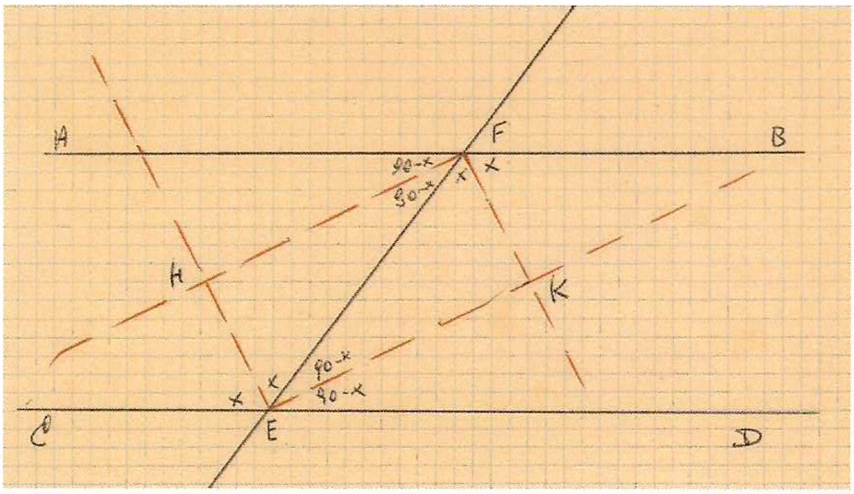
Dimostrazione:

- Si assegnino dei valori letterari agli angoli del triangolo: $\hat{B}=\hat{C}$=x; $\widehat{BAC}$=4x;
- La somma degli angoli interni di un triangolo è 180°, perciò: x+x+4x= 180°: x=30°;
- $\widehat{DAC}$, angolo adiacente a $\widehat{BAC}$, misura 180°-120°= 60°;
- $\widehat{ACD}$, complementare ad $\widehat{ACB}$ per costruzione, misura 90°-30°= 60°;
- Anche $\widehat{ADC}$ per differenza di angoli interni di un triangolo da 180°, misura 60°.

Il triangolo ACD ha dunque tutti gli angoli eguali e perciò è equilatero: : $\widehat{ACD}=\widehat{CDA}=\widehat{DAC}$.

C.v.d.

5) Dimostrare che, se per i vertici dei quattro angoli interni di due rette parallele, tagliate da una trasversale, si conducono le bisettrici, i quattro punti in cui esse s'intersecano, sono vertici di un rettangolo.



Ipotesi:

$AB//CD$ (1)

$\widehat{EFK}=\widehat{KFB}=\widehat{CEH}=\widehat{HEF}$ (2)

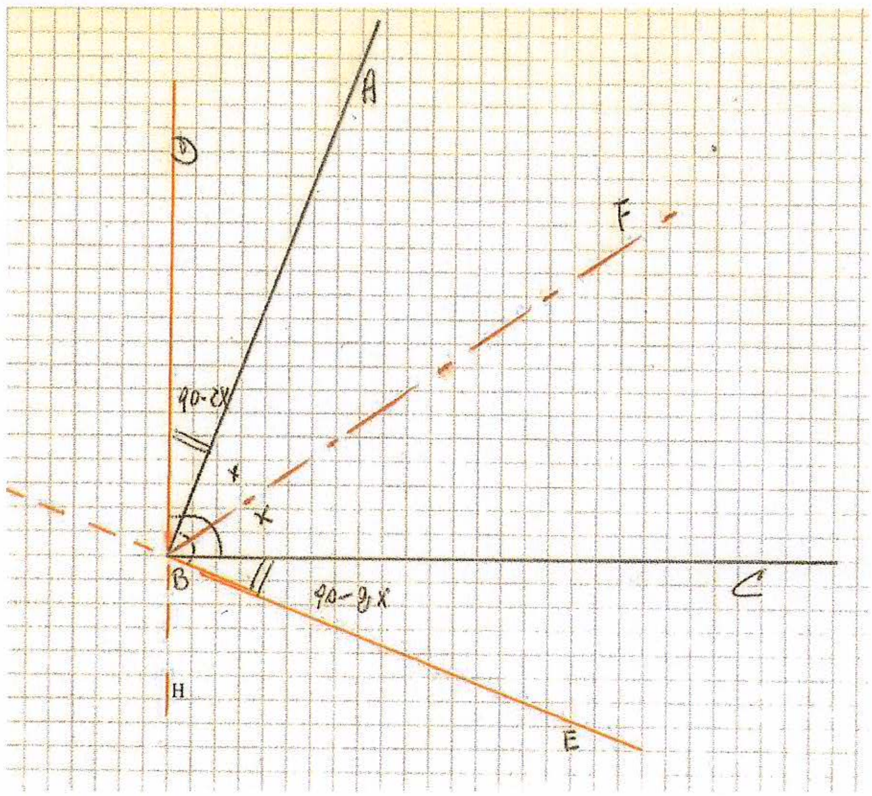
$\widehat{AFH}=\widehat{HFE}=\widehat{FEB}=\widehat{BED}$ (3)

Tesi: $\widehat{HFK}=\widehat{FKE}=\widehat{KEH}=\widehat{EHF}=90°$

Dimostrazione:

Si assegnino dei valori letterari agli angoli partendo ad esempio da $\widehat{EFB}$:
$\widehat{EFK}=\widehat{KFB}=\widehat{CEH}=\widehat{HEF}=x$; $\widehat{AFH}=\widehat{HFE}=\widehat{FEB}=\widehat{BED}= 180°-2x = 90°-x$.
Considerando poi i singoli angoli HEK e HFK, per somma sono eguali a $90°-x+x=90°$. Gli angoli FKE e FHE , considerato che la somma interna degli angoli di un triangolo è 180°, in riferimento ai triangoli FKE e FHE saranno eguali a $180°-(x+90°-x)= 180°-90°= 90°$.
Tutti gli angoli enumerati nella tesi sono dunque di 90°. C.v.d.

6) Dato un angolo ABC, per il vertice B tracciare le perpendicolari ai lati AB e CB, EB e DB. Dimostrare che la bisettrice dell'angolo ABC corrisponde alla bisettrice dell'angolo DBE e che i due angoli suddetti sino supplementari.



Ipotesi:

$\widehat{ABF}=\widehat{FBC}$ (1)

$BE \perp BA$; $BD \perp BC$ (2)

Tesi:

$\widehat{DBF}=\widehat{FBE}$

$\widehat{ABC} + \widehat{DBE} = 180°$

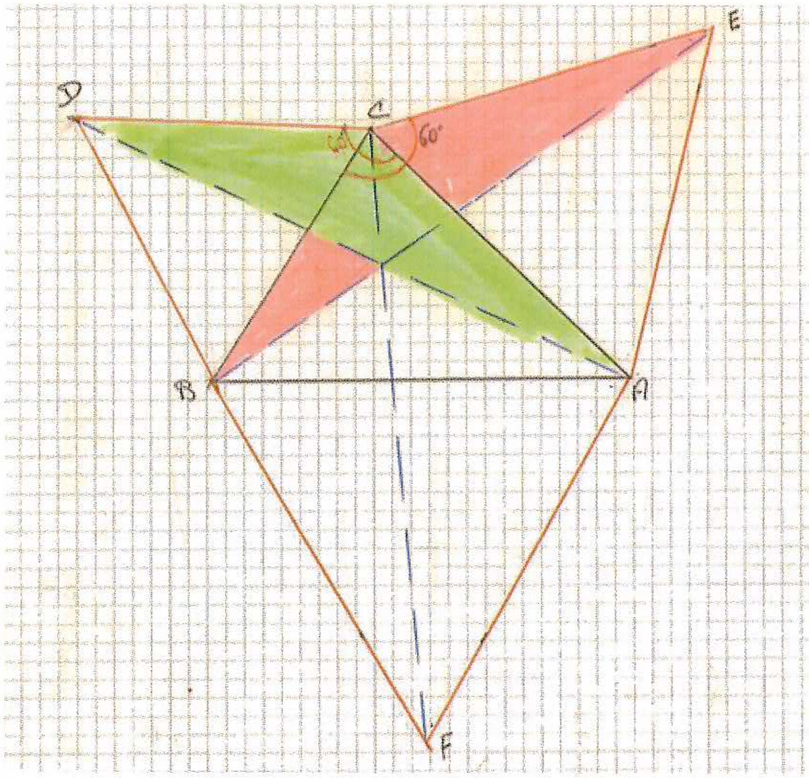
Dimostrazione:

- Si assegnino di valori letterari (x) ad $\widehat{ABF}=\widehat{FBC}$.
- $\widehat{DBA} = 90°-2x$ e $\widehat{CBE} = 90° - 2x$ per la (2).
- Per somma di angoli eguali anche $\widehat{DBF}=\widehat{FBE}$.
- Si consideri $\widehat{HBC}=90°$ per la (2): l'angolo è composto da $\widehat{CBE}=90°-2x$ e $\widehat{HBE}$ (supplementare di DBE) $= 90°- (90°-2x) = 2x$.

Ma $\widehat{HBE}=\widehat{ABC}$: per la proprietà transitiva $\widehat{ABC} + \widehat{DBE} = 180°$. C.v.d.

Oppure: si sommino gli angoli DBE + ABC >> $90-2x+2x+90-2x+2x = 180°$

7) Sui lati di un triangolo ABC si costruiscono i triangoli equilateri ABF, ACE, BCD. Dimostrare che congiungendo A con D, B con E, C con F, si hanno tre segmenti eguali.



Ipotesi:

$\overline{DC}=\overline{CB}=\overline{DB}$ (1)

$\overline{CE}=\overline{EA}=\overline{CA}$ (2)

$\overline{AB}=\overline{BF}=\overline{AF}$ (3)

Tesi: $\overline{CF}=\overline{DA}=\overline{BE}$

Dimostrazione:

- Si considerino i triangoli CDA e CBE, sono eguali per il primo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\overline{CA}=\overline{CE}$ per la (2); $\overline{DC}=\overline{CB}$ per la (1); $\widehat{BCE}=\widehat{DCA}$ per somma di angoli eguali, perché entrambi composti $\widehat{BCA}$ + 60°, essendo gli angoli dei triangoli equilateri di 60°. Anche $\overline{DA}=\overline{BE}$.

- Lo stesso ragionamento vale per i triangoli BDA e BCF. Dunque $\overline{CF}=\overline{DA}=\overline{BE}$. C.v.d.