

ESERCIZI DELLA TERZA LEZIONE

1) Dato un triangolo qualunque ABC e la bisettrice AS di uno dei suoi angoli, condurre una retta perpendicolare alla bisettrice che seci i lati AB e AC rispettivamente nei punti D ed E. dimostrare che il triangolo AED è isoscele.

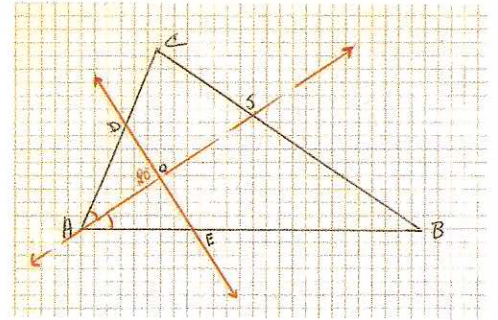
Ipotesi:

$$\widehat{CAS} = \widehat{BAS} \quad (1)$$

$$DE \perp AS \quad (2)$$

Tesi: $AD = AE$

Dimostrazione: $\widehat{DOA} = \widehat{EOA}$ per il secondo criterio d'eguaglianza dei triangoli, infatti: $\overline{AO}$ in comune; $\widehat{CAS} = \widehat{BAS}$ per la (1); $\widehat{DOA} = \widehat{EOA} = 90^\circ$ per la (2). In particolare $\overline{AD} = \overline{AE}$. C.v.d.



2) Dato un triangolo qualunque ABC, condurre dai vertici B e C le perpendicolari BD e CE a una retta qualunque passante per il vertice A ed esterna al triangolo. Dimostrare che le congiungenti il punto medio M del lato BC con D ed E sono eguali. (Si suggerisce di tracciare per M una parallela alla DE...).

Ipotesi:

$$BD \text{ e } CE \perp DE \quad (1)$$

$$\overline{BM} = \overline{MC} \quad (2)$$

Tesi: $\overline{DM} = \overline{ME}$

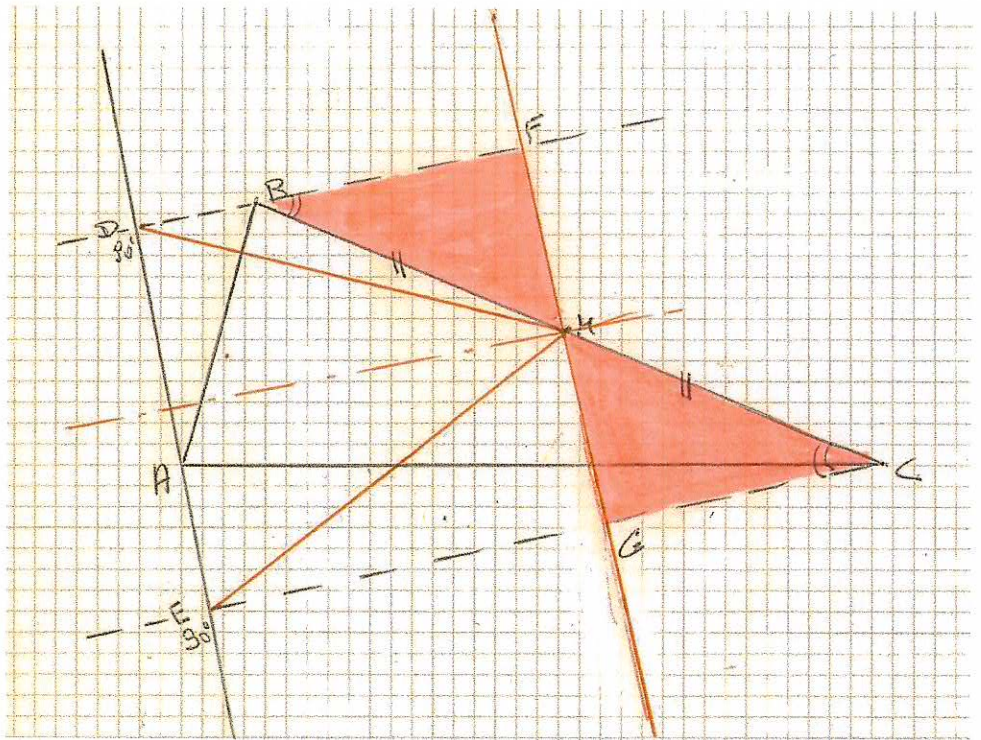
Dimostrazione:

- Si tracci per M una parallela a DE. Le due perpendicolari DB e CE intersecano la parallela in F e in G.

- Si considerino i triangoli MBF e MCG che sono eguali per il secondo criterio d'eguaglianza dei triangoli, infatti: $\overline{BM} = \overline{MC}$ per la (2);

$\widehat{FBM} = \widehat{MCG}$ perché alterni interni delle parallele EC e DF (perché le perpendicolari alla stessa retta sono parallele tra loro avendo ad esempio gli angoli alterni interni eguali a 90°) secati da $\overline{BC}$; $\widehat{BMF} = \widehat{CMG}$ perché opposti al vertice. In particolare sono eguali $\overline{FM}$ e $\overline{GM}$. (3)

- Anche i triangoli FMD e GME sono eguali per il primo criterio d'eguaglianza dei triangoli, Infatti: $\overline{FM} = \overline{GM}$ per la (3); $\widehat{F} = \widehat{G} = 90^\circ$ perché alterni interni di angoli di 90° ; $\overline{DF} = \overline{EG}$ perché due distanze dalle stesse rette parallele. In particolare $\overline{DM} = \overline{ME}$. C.v.d.



3) Sia ABC un triangolo scaleno con $\overline{AC} > \overline{AB}$ e sia $\overline{AM}$ la mediana relativa al lato BC . Si prolunghi poi la mediana di un segmento eguale ad $\overline{AM}$. Dimostrare che l'angolo $\widehat{MAC}$ è minore di $\widehat{MAB}$ e che le rette passanti rispettivamente da BD e CD sono parallele ad $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$.

Ipotesi: $\overline{AC} > \overline{AB}$ (1)
 $\overline{BM} = \overline{MC}$ (2)
 $\overline{AM} = \overline{MD}$ (3)

Tesi: $BD \parallel AC$; $CD \parallel AB$
 $\widehat{DAC} < \widehat{DAB}$

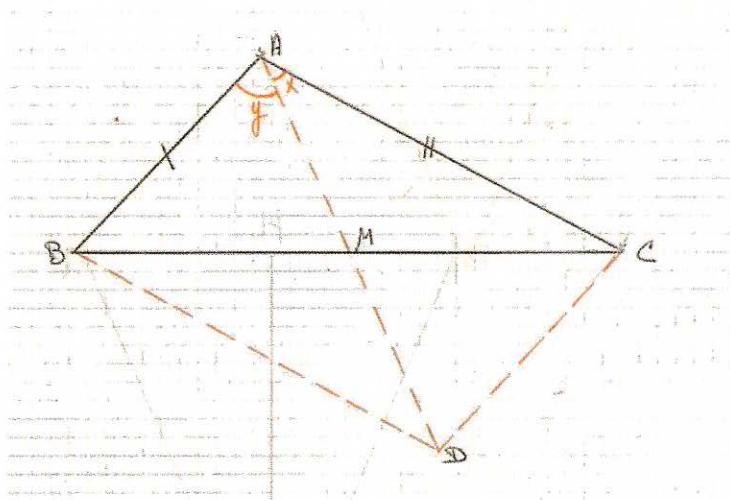
Dimostrazione:

$\widehat{MAC} = \widehat{MBD}$ per il primo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\overline{AM} = \overline{MD}$ e $\overline{BM} = \overline{MC}$ per la (2) e la (3); $\widehat{AMC}$ opposto al vertice di $\widehat{BMD}$.

Per le stesse ragioni $\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$.

In particolare $\widehat{DAC} = \widehat{ADB}$, due angoli alterni interni rispetto a AC e BD secati da AD che risultano dunque parallele. Lo stesso vale per $\widehat{BAD} = \widehat{ADC}$, due angoli alterni interni rispetto a BA e DC secati da AD che risultano dunque parallele.

Considerando poi il triangolo ABD , si osserva che il lato $BD = AC$, perciò $\overline{BD} > \overline{AB}$ per la (1). In un triangolo poi a lati maggiori si oppongono angoli maggiori e ai minori angoli minori. A BD si oppone $\widehat{BAD}$ e ad $\overline{AB}$, $\widehat{ADB} = \widehat{DAC}$. Perciò $\widehat{DAC} < \widehat{DAB}$. C.v.d.



4) Sui lati di un triangolo equilatero ABC si stacchino i segmenti eguali AD , BE , CF e si congiungano i punti D , E , F . Dimostrare che il triangolo DEF ottenuto è pur esso equilatero.

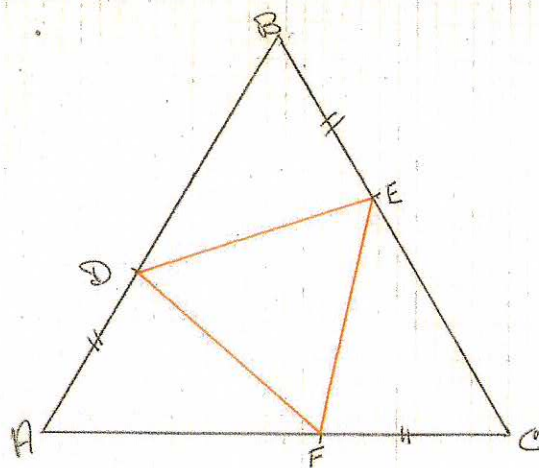
Ipotesi: $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$ (1)
 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$ (2)
 $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$ (3)

Tesi: $\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD}$

Dimostrazione:

- I triangoli DAF , BDE , ECF sono eguali per il primo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$ per la (3); $\overline{BD} = \overline{AF} = \overline{EC}$ perché differenza di segmenti eguali per la (2) e la (3); $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$ per la (1).

- Ne risulta che anche $\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD}$. C.v.d.



5) Dimostrare che, se la bisettrice di un angolo esterno di un triangolo è parallela a un lato, il triangolo è isoscele e ha per base questo lato.

Ipotesi:

$$DE \parallel AC \quad (1)$$

$$\widehat{FBE} = \widehat{EBC} \quad (2)$$

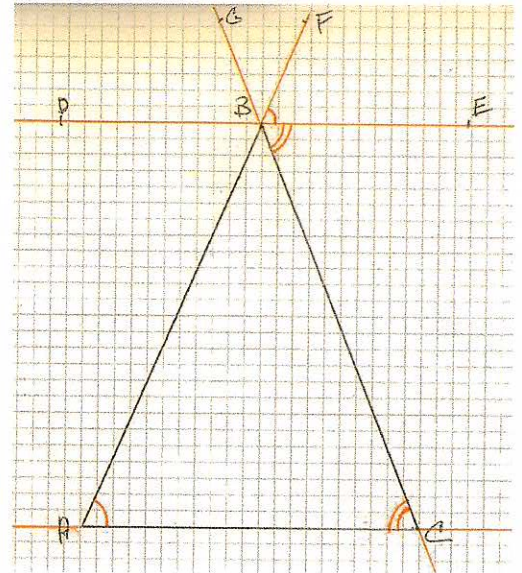
Tesi: $\widehat{A} = \widehat{C}$

Dimostrazione:

- Considerate le parallele DE e AC con secante FA, $\widehat{FBE}$ e $\widehat{A}$ sono eguali perché corrispondenti;

- Considerate le parallele DE e AC con secante GC, $\widehat{EBC} = \widehat{C}$ perché alterni interni;

- Per la proprietà transitiva anche $\widehat{A} = \widehat{C}$, angoli alla base del triangolo isoscele ABC. C.v.d.



6) Dimostrare che le bisettrici di due angoli alterni interni di due rette parallele tagliate da una trasversale, sono parallele.

Ipotesi:

$$AB \parallel CD \quad (1)$$

$$\widehat{OPH} = \widehat{HPB} \quad (2)$$

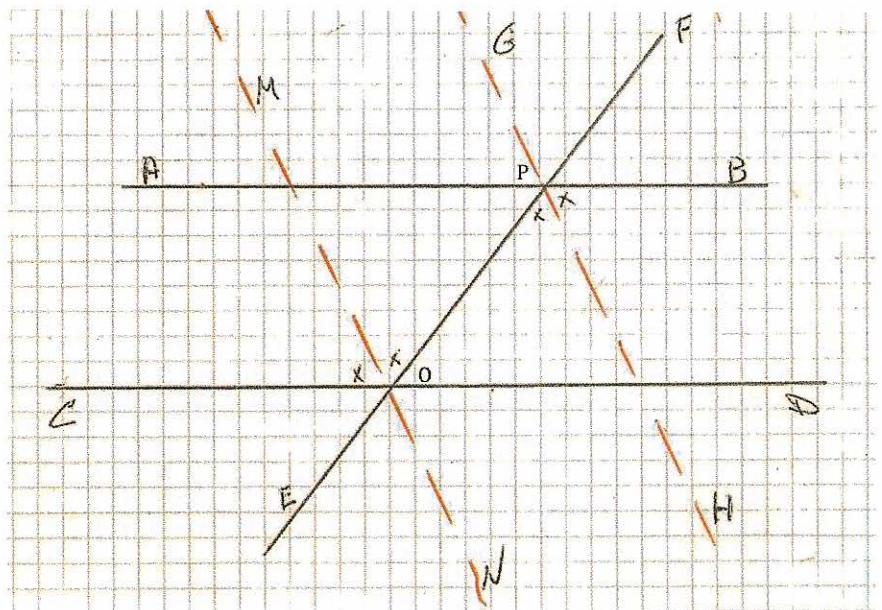
$$\widehat{COM} = \widehat{MOP} \quad (3)$$

Tesi: $MN \parallel GH$

Dimostrazione:

- Si assegna il valore letterario x alla metà degli angoli alterni eguali (a sua volta eguali le loro metà, determinate dalle rispettive bisettrici) per la (2) e la (3).

- Si considerino le rette su cui giacciono le bisettrici degli angoli alterni MN e GH, secate da FE. Gli angoli OPH e MOP sono a loro volta alterni interni e valgono entrambi x. Di conseguenza $MN \parallel GH$. C.v.d.



7) Dato un angolo ABC e tracciata la sua bisettrice BS, si conduca la perpendicolare DB alla bisettrice BS. Dimostrare che BD è la bisettrice dell'angolo adiacente del dato.

Ipotesi:

$$\widehat{ABS} = \widehat{SBC} \quad (1)$$

$$BS \perp DB \quad (2)$$

Tesi:

$$\widehat{DBA} = \widehat{DBT}$$

Dimostrazione:

- Si assegnino dei valori letterari agli angoli determinati dalla bisettrice in costruzione, $\widehat{ABS} = \widehat{SBC} = x$;

- Anche $\widehat{TBP} = x$ perché opposto al vertice di $\widehat{SBC}$.

- Considerando l'angolo $\widehat{DBP} = 90^\circ$ per la (2), $\widehat{DBT} = 90 - x$.

- Considerando l'angolo $\widehat{DBS} = 90^\circ$ per la (2), $\widehat{DBA} = 90 - x$.

- Ne consegue che $\widehat{DBA} = \widehat{DBT}$. C.v.d.

