

ESERCIZI SECONDA LEZIONE

1) Dimostrare che, congiungendo un punto qualunque della bisettrice di un triangolo isoscele con gli estremi della base, si ottiene un altro triangolo isoscele.

Ipotesi:

$$AB = BC \quad (1)$$

$$\widehat{BAC} = \widehat{BCA} \quad (2)$$

Tesi: $\overline{AD} = \overline{DC}$

Dimostrazione:

Si considerino i due triangoli ADH e CDH:

sono eguali per il primo criterio d'uguaglianza, infatti:

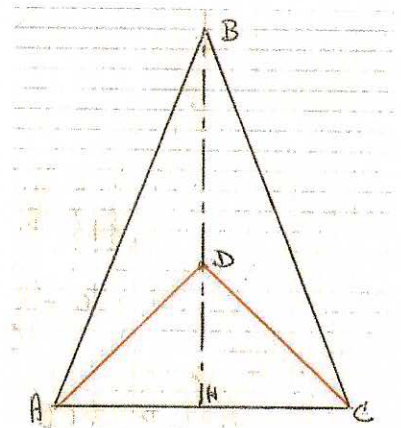
- il lato DH è in comune;

Poiché nel triangolo isoscele la bisettrice del vertice corrisponde all'altezza e alla mediana:

$$- \overline{AH} = \overline{HC}$$

$$- \widehat{DHA} = \widehat{DHC} = 90^\circ$$

Perciò anche $\overline{AD}$ e $\overline{DC}$ sono eguali. C.v.d.



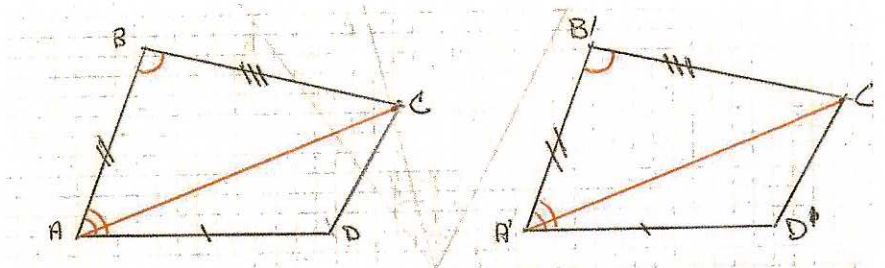
2) Dimostrare che due quadrilateri sono eguali se hanno tre lati consecutivi e i due angoli compresi rispettivamente eguali.

Ipotesi:

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}; \overline{BC} = \overline{B'C'}; \overline{AD} = \overline{A'D'} \quad (1)$$

$$\widehat{A} = \widehat{A'}; \widehat{B} = \widehat{B'} \quad (2)$$

Tesi: $ABCD = A'B'C'D'$



Dimostrazione: Si tracciano le diagonali rispettivamente AC e A'C' sui due quadrilateri che vengono divisi in due triangoli. Se si riesce a dimostrare l'uguaglianza dei due rispettivi triangoli, si può ritenere dimostrata la tesi.

- $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ per il primo criterio d'uguaglianza dei triangoli, avendo $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ e $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ per la (1), e $\widehat{B} = \widehat{B'}$ per la (2). In particolare risultano eguali $\widehat{ACB}$ e $\widehat{A'C'B'}$ e gli angoli $\widehat{BAC}$ e $\widehat{B'A'C'}$.

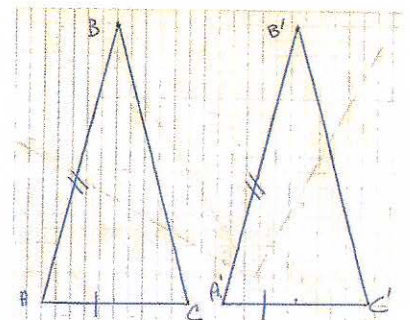
- $\widehat{ADC} = \widehat{A'D'C'}$ ancora per il primo criterio d'uguaglianza dei triangoli, avendo $\overline{AD} = \overline{A'D'}$ per la (1); $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$ per la dimostrazione precedente; $\widehat{CAD} = \widehat{C'A'D'}$ perché differenza di angoli eguali, per la (2) e la dimostrazione precedente. C.v.d.

3) Dimostrare che due triangoli isosceli sono eguali se hanno eguali rispettivamente la base e un lato.

Ipotesi: $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ isosceli (1)

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}; \overline{AC} = \overline{A'C'} \quad (2)$$

Tesi: $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$



Dimostrazione: i due triangoli hanno uguali $\widehat{AB}$ con $\widehat{BC}$ il primo, $\widehat{A'B'}$ con $\widehat{B'C'}$ il secondo per la (1). Per la (2) e per la proprietà transitiva, anche $\widehat{BC}=\widehat{B'C'}$.

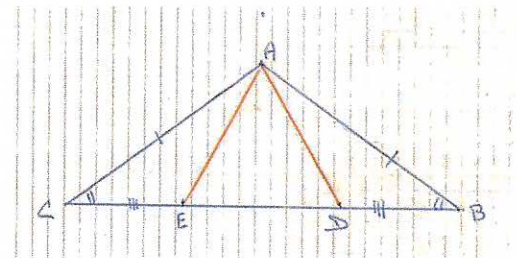
Così per il terzo criterio d'eguaglianza dei triangoli $ABC=A'B'C'$. C.v.d.

4) Sulla base CB di un triangolo isoscele col vertice in A, si prendano due segmenti uguali BD e CE e si congiunga A con D e con E. Dimostrare che anche il triangolo ADE è isoscele.

Ipotesi:

$\triangle CAB$ isoscele ($\widehat{C}=\widehat{B}$; $\overline{AC}=\overline{AB}$) (1)
 $\overline{CE}=\overline{DB}$

Tesi: $\overline{EA}=\overline{AD}$



Dimostrazione:

I triangoli CEA e BDA sono uguali per il primo criterio d'eguaglianza, infatti:

- $\widehat{C}=\widehat{B}$; $\overline{AC}=\overline{AB}$ per la (1);

- $\overline{CE}=\overline{DB}$ per la (2)

In particolare anche $\overline{EA}=\overline{AD}$. C.v.d.

5) Dimostrare che sono uguali le bisettrici degli angoli alla base di un triangolo isoscele.

Ipotesi: $\triangle ACB$ isoscele ($\overline{AC}=\overline{AB}$; $\widehat{C}=\widehat{B}$) (1)
 $\overline{CBH}=\overline{HBA}$; $\overline{BCK}=\overline{ACK}$ (2)

Tesi: $\overline{CK}=\overline{BH}$

Dimostrazione:

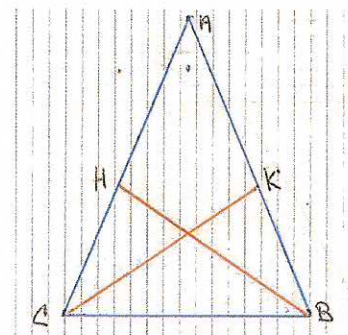
$\triangle CBH=\triangle BCK$ per il secondo criterio d'eguaglianza dei triangoli:

- $\widehat{C}=\widehat{B}$ per la (1);

- $\overline{CB}$ in comune;

- $\widehat{KCB}=\widehat{HBC}$ perchè metà di angoli uguali per la (1) e la (2).

In particolare $\overline{CK}=\overline{BH}$. C.v.d.



6) Dimostrare che un triangolo è isoscele se l'altezza e la mediana relative a uno dei tre lati coincidono.

Ipotesi:

$\overline{AH}=\overline{HC}$ (1)

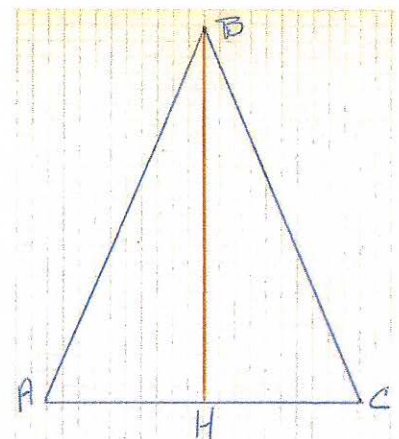
$\widehat{BHA}=\widehat{BHC}=90^\circ$ (2)

Tesi:

$\overline{AB}=\overline{BC}$ oppure $\widehat{A}=\widehat{C}$

Dimostrazione:

I triangoli ABH e CBH sono uguali per il primo criterio d'eguaglianza dei triangoli: $\overline{BH}$ in comune; $\overline{AH}=\overline{HC}$ per la (1);



$\widehat{BHA} = \widehat{BHC}$ per la (2). In particolare sono uguali $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$. C.v.d.

7) Dato il triangolo isoscele ABC di vertice B, prolungare i lati BA e BC di due segmenti uguali AD e CE. dimostrare che:

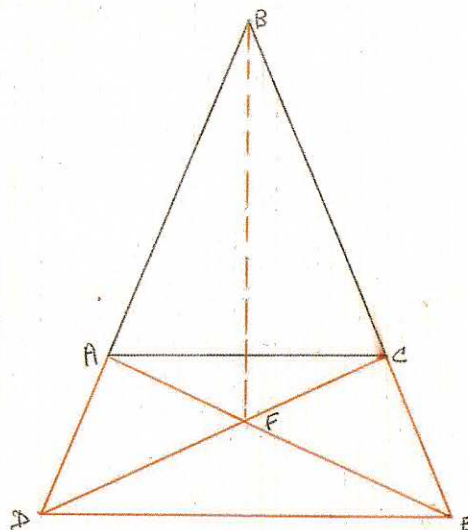
- 1) i triangoli ADC e ACE sono uguali;
- 2) i triangoli BAE e BCD sono uguali;
- 3) il triangolo AFC è isoscele, essendo F l'intersezione di DC con AE;
- 4) La semiretta BF è bisettrice dell'angolo ABC;
- 6) i triangoli ADE e CED sono uguali.

Ipotesi:

ABC > isoscele $\Rightarrow \overline{AB} = \overline{BC}$; $\widehat{BAC} = \widehat{BCA}$ (1)
 $\overline{AD} = \overline{CE}$ (2)

Tesi:

- 1) $\widehat{ADC} = \widehat{ACE}$
- 2) $\widehat{BAE} = \widehat{BCD}$
- 3) $\widehat{FAC} = \widehat{ACF}$ oppure $\overline{AF} = \overline{FC}$
- 4) $\widehat{ABF} = \widehat{FBC}$
- 5) $\widehat{ADE} = \widehat{CED}$



Dimostrazione:

- 1) $\widehat{ADC} = \widehat{ACE}$ per il primo criterio di uguaglianza: $\overline{AC}$ in comune, $\overline{AD} = \overline{CE}$ per la (2); $\widehat{DAC} = \widehat{ACE}$ per differenza di angoli uguali ($180^\circ - \widehat{BAC} / \widehat{BCA}$). (3)
- 2) $\widehat{BAE} = \widehat{BCD}$ per il terzo criterio di uguaglianza: $\overline{DC} = \overline{AE}$ per la (3); $\overline{AB} = \overline{BC}$ per la (1); $\overline{BD} = \overline{BE}$ perché somma di segmenti uguali (1) e (2). (4)
- 3) Il triangolo AFC è isoscele per la (3) avendo $\widehat{FAC} = \widehat{ACF}$. (5)
- 4) I triangoli ABF e CBF sono uguali per il terzo criterio d'uguaglianza dei triangoli: $\overline{BF}$ in comune; $\overline{AB} = \overline{BC}$ per la (1); $\overline{AF} = \overline{FC}$ perché lati di un triangolo isoscele per la (5). (6)
- 5) I triangoli ADE e CED sono uguali per il terzo criterio di uguaglianza dei triangoli: $\overline{DE}$ in comune; $\overline{AD} = \overline{CE}$ per la (2); $\overline{DC} = \overline{AE}$ per la (3). C.v.d.