

ESERCIZI PRIMA LEZIONE

1) Dato un angolo AOB e la sua bisettrice OS, tracciata una semiretta OC interna all'angolo SOB, verificare che: $\widehat{SOC} = \frac{1}{2} (\widehat{AOC} - \widehat{COB})$.

Ipotesi: $\widehat{AOS} = \widehat{SOB}$ (1)

Tesi: $\widehat{SOC} = \frac{1}{2} (\widehat{AOC} - \widehat{COB})$. (2)

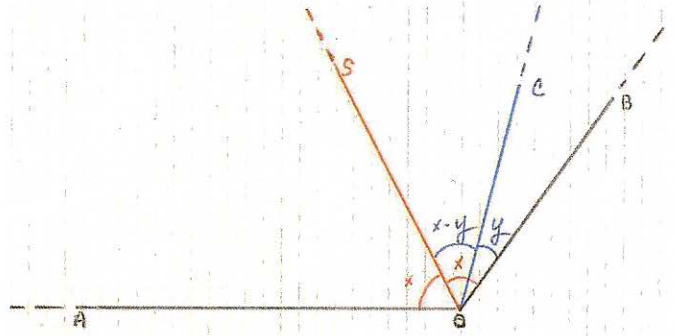
Dimostrazione:

Si assegnano dei valori letterari a tutti gli angoli interessati:

$$\widehat{COB} = y$$

$$\widehat{AOS} = \widehat{SOB} = x \text{ per la (1)}$$

$$\widehat{SOC} = x - y$$



Per rendere più semplice il confronto, si sostituiscono gli angoli con valori letterari sulla (2)

$$x - y = \frac{1}{2} (x + x - y - y)$$

$$x - y = \frac{1}{2} (2x - 2y)$$

$$x - y = \frac{1}{2} 2(x - y)$$

$$x - y = x - y \quad \text{C.v.d.}$$

2) Un angolo è $\frac{1}{3}$ di giro. Dimostrare che il prolungamento della bisettrice forma con i lati dell'angolo altri due angoli uguali al dato.

Ipotesi: $\widehat{AOB} = 180^\circ$ (1)

$\widehat{AOC} = 120^\circ$ (2)

$\widehat{AOD} = \widehat{DOC} = 60^\circ$ (3)

Tesi:

$$\widehat{COE} = \widehat{AOE} = \widehat{AOC}$$

Dimostrazione:

$$\widehat{COB} = 60^\circ$$

perché $\widehat{AOC} = 120^\circ$ per la (2)

$\widehat{AOB} = 180^\circ$ per (1)

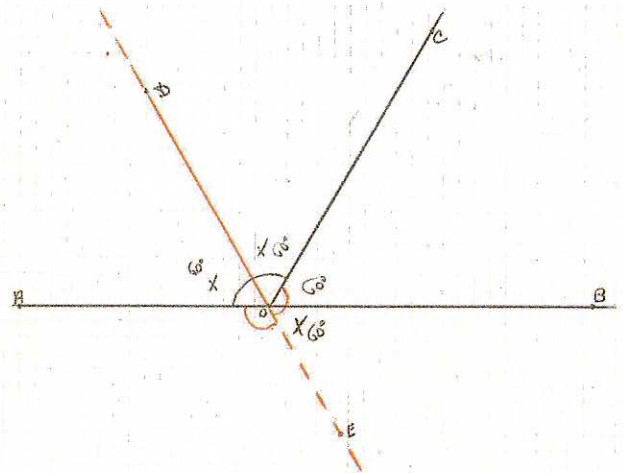
$$\Rightarrow 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ = \widehat{COB}$$

$$\widehat{EOB} = 60^\circ$$

perché opposto al vertice di $\widehat{AOD} = 60^\circ$ per la (3)

perciò: $\widehat{EOB} (60^\circ) + \widehat{COB} (60^\circ) = \widehat{COE} = 120^\circ$

Anche $\widehat{AOE} = 120^\circ$ perché la sottrazione all'angolo giro di $\widehat{AOC}$ e $\widehat{COE}$ ($360^\circ - 120^\circ - 120^\circ$) C.v.d.



3) Dato un angolo convesso AOB e la sua bisettrice OS, tracciata una semiretta OC interna all'angolo SOB, verificare che: $\widehat{SOC} = \frac{1}{2} (\widehat{AOC} - \widehat{COB})$.

Ipotesi:

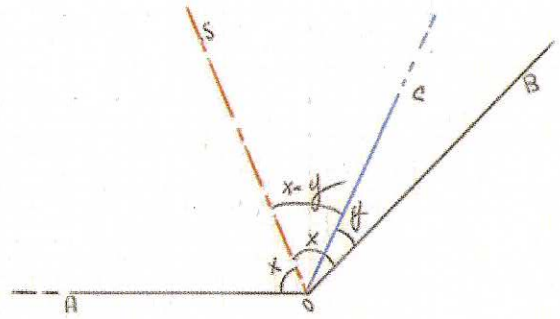
$$\widehat{AOB} < 180^\circ$$

$$\widehat{AOS} = \widehat{SOB} \quad (1)$$

$$OC \text{ interna ad } \widehat{AOB} \quad (2)$$

Tesi: $\widehat{SOC} = \frac{1}{2} (\widehat{AOC} - \widehat{COB})$

Dimostrazione:



Si assegnano valori letterari agli angoli con una maggiore scomposizione possibile:

$$\widehat{AOS} = \widehat{SOB} = x \text{ per la (1)}$$

$$\widehat{COB} = y$$

$\widehat{SOC} = x - y$ per la (2) Poi si passa alla sostituzione nell'uguaglianza assegnata.

$$x - y = \frac{1}{2} (x + x - y - y); \quad x - y = \frac{1}{2} (2x - 2y); \quad x - y = \frac{1}{2} 2(x - y); \quad x - y = x - y. \text{ C.v.d.}$$

4) Dimostrare che se le bisettrici di due angoli consecutivi sono perpendicolari, i due angoli sono adiacenti.

Ipotesi:

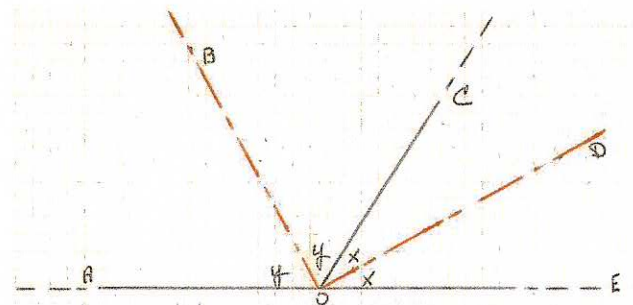
$$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} \quad (1)$$

$$\widehat{EOD} = \widehat{DOC} \quad (2)$$

$$\widehat{BOD} = 90^\circ \quad (3)$$

Tesi: $\widehat{AOE} = 180^\circ$

Dimostrazione:



Si assegnano valori letterari ai singoli angoli

$$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = y \text{ per la (1)}$$

$$\widehat{DOE} = \widehat{DOC} = x \text{ per la (2)}$$

$$\text{Se } \widehat{BOD} (x + y) = 90^\circ \text{ per la (3)}$$

$$\widehat{AOE} (2x + 2y) = 180^\circ \text{ C.v.d.}$$

5) Se quattro semirette aventi la stessa origine dividono il piano in quattro angoli tali che il I è eguale al III, e il II è eguale al IV, dimostrare che la prima semiretta è adiacente alla terza e la seconda è adiacente alla quarta.

Ipotesi: $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ (1)

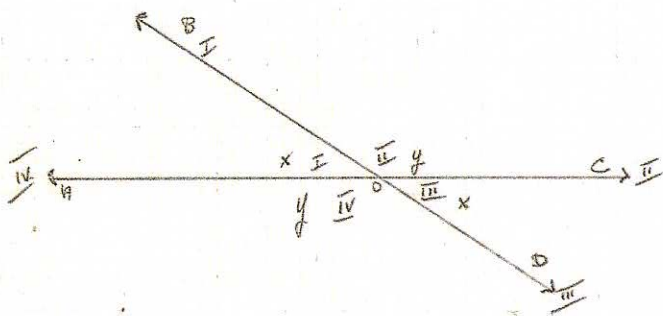
$\widehat{BOC} = \widehat{AOD}$ (2)

Tesi: $\widehat{BOD} = \widehat{AOC} = 180^\circ$

Dimostrazione: Si distribuiscono valori letterali agli angoli secondo la (1) e la (2). Poi sommiamo tra loro gli angoli che non risultano eguali: $x + y$ (I + II) e $x + y$ (III + IV).

Risulta che l'angolo giro O di 360° è composto da due angoli eguali, perché somma di angoli eguali dà come risultato angoli eguali: $x + y$, entrambi dunque di 180° .

Se $\widehat{BOD} = \widehat{AOC} = 180^\circ$, OA e OC sono adiacenti. Lo stesso vale per OB e OD. C.v.d.



6) Dimostrare che le bisettrici di due angoli adiacenti sono perpendicolari.

Ipotesi:

$\widehat{AOC} + \widehat{COE} = 180^\circ$ (1)

$\widehat{AOB} = \widehat{BOC}$ (2)

$\widehat{COD} = \widehat{DOE}$ (3)

Tesi: $\widehat{BOD} = 90^\circ$

Si assegnano ai singoli angoli valori letterali:

$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = y$ per la (2)

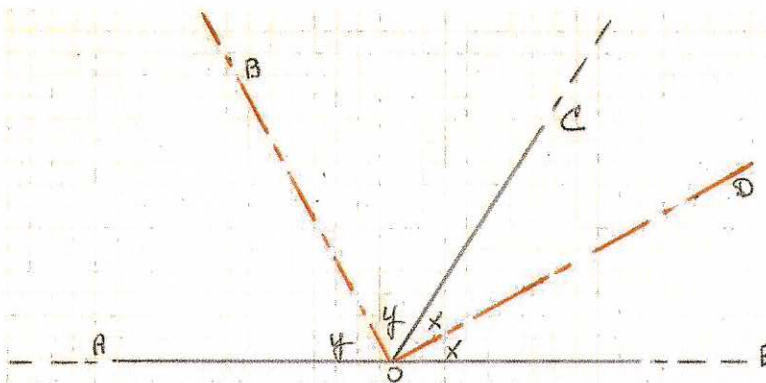
$\widehat{COD} = \widehat{DOE} = x$ per la (3)

$\widehat{AOB} + \widehat{DOE} = x + y$

$\widehat{BOC} + \widehat{COD} = \widehat{BOD} = x + y$

Visto che somme di angoli eguali danno angoli eguali, all'interno dell'angolo $\widehat{AOE}$ di 180° per la (1), abbiamo due angoli eguali. Se sono eguali, hanno anche un'ampiezza di 90° .

Perciò $\widehat{BOD} = 90^\circ$ C.v.d.



7) Due angoli adiacenti AOB e BOC sono il primo doppio del secondo. Condurre due semirette OE e OF, l'una interna al primo e l'altra interna al secondo, in modo che sia $\widehat{AOE} = 2\widehat{EOB}$ e $\widehat{COF} = 2\widehat{BOF}$. Dire quale frazione dell'angolo retto è l'angolo EOF e a quale angolo è eguale.

Ipotesi: $\widehat{AOE} = 2\widehat{EOB}$ (1) **Tesi:** $\widehat{EOF} = ?$

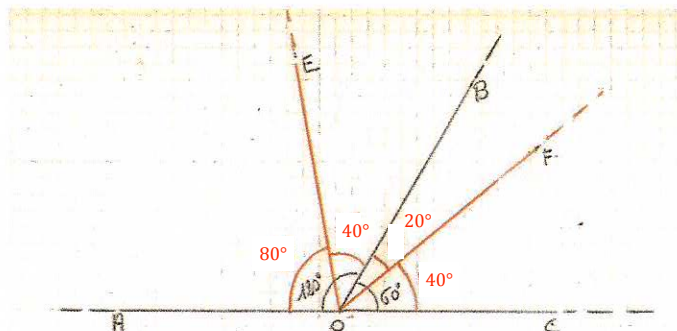
$\widehat{COF} = 2\widehat{BOF}$ (2)

Dimostrazione: Si assegnano sulla figura i valori ai singoli angoli secondo le istruzioni dell'ipotesi.

$$\widehat{EOF} = 40^\circ + 20^\circ = 60^\circ$$

$$\frac{60^\circ}{90^\circ} = \frac{2}{3} ; \widehat{EOF} = \frac{2}{3} 90^\circ$$

$$\frac{60^\circ}{90^\circ} = \frac{2}{3}$$



8) Dimostrare che se due angoli hanno il vertice comune e le bisettrici appartengono alla medesima retta, i due angoli sono opposti al vertice.

Ipotesi: $\widehat{DOF} = \widehat{FOB}$
 $\widehat{AOE} = \widehat{EOC}$
 $\widehat{FOE} = 180^\circ$

Tesi: $\widehat{DOC} = \widehat{AOB} = 180^\circ$

La tesi non può essere dimostrata perché, con i dati offerti dall'ipotesi, i due angoli considerati, con il vertice in comune e le bisettrici adiacenti possono anche non essere opposti. Si veda a proposito la figura 3.

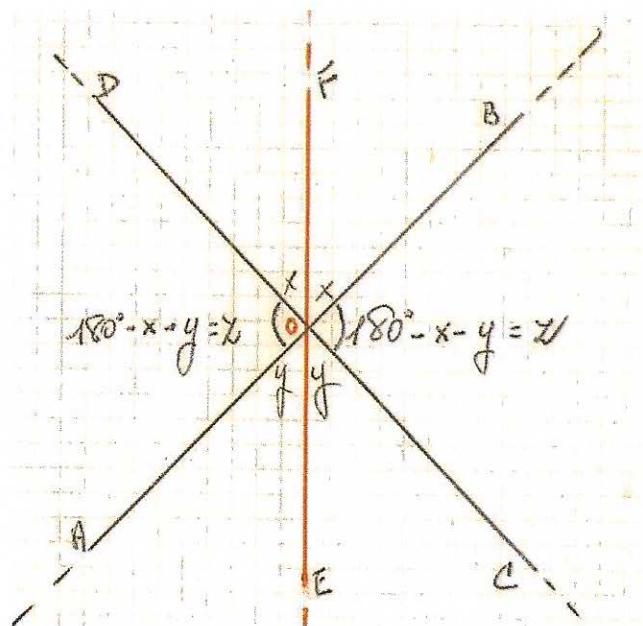


Figura 1

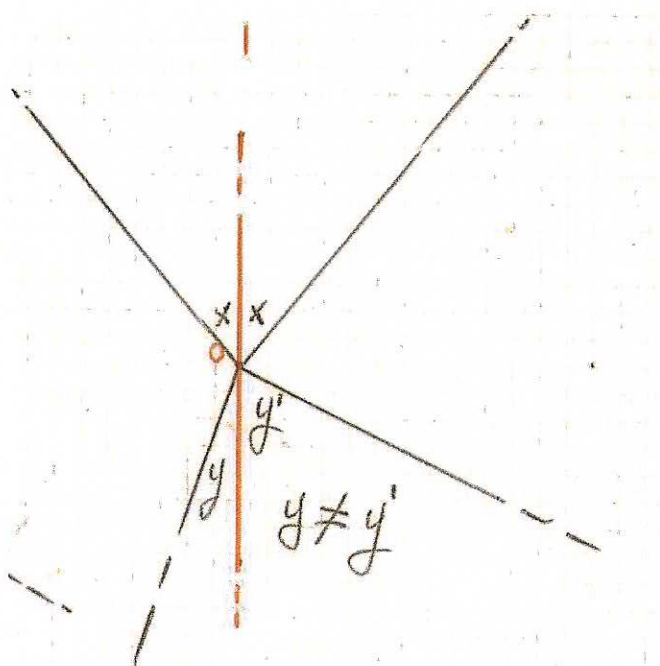


Figura 2

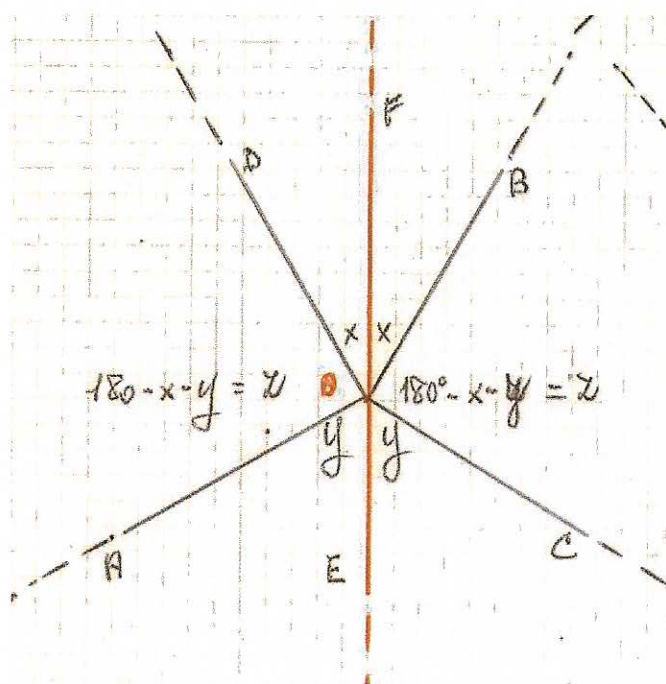


Figura 3