NUMERI ARITMETICA (Lezione I)

La divisione che gli alunni non sanno più eseguire:

```
---  ,  ,
117 2 4    |12____
 = 9 2     | 977
   = 8 4
      = =
```

```
____,  ,
117 2 4    |12____
108        | 977  (quoto)
   9 2
   8 4
      8 4
      8 4
      = =
```

```
_____ , ,
1256 7 4  | 243__________
    41 7    | 517
    174  4
          43
```

```
_____  ,
1256 7 4  | 243__________
1215       | 517    (quoziente)
    41 7
     243
     174 4
      1701
         43
```

MINIMO COMUNE MULTIPLO (Lezione II)

m.c.m: Per trovare il minimo comune multiplo tra più numeri, bisogna scomporre ogni numero nei suoi numeri primi, poi prendere i fattori comuni e non comuni con il maggiore esponente. Questa operazione è indispensabile per sommare frazioni con denominatore differente.

$$\frac{7}{30} + \frac{2}{50} - \frac{20}{21} - \frac{11}{8} =$$

Conviene innanzi tutto semplificare la frazione là dove sia possibile. Qui $\frac{2}{50}$ diventa $\frac{1}{25}$

$$= \frac{7}{30} + \frac{1}{25} - \frac{20}{21} - \frac{11}{8} =$$

Poi si passa a scomporre in fattori primi 30, 25, 21, 8 >> 30 = 2x3x5
25 = 5^2
21 = 3x7
8 = 2^3

Si calcola il m.c.m. scegliendo i fattori comuni e non comuni con il maggior esponente: 2^3 x 3 x 5^2 x 7 = 4200

4200:30x7= 980

$$= \frac{980 + 168 - 4000 - 5775}{4200} = -\frac{8627}{4200}$$

4200:25x1= 168
4200:21x20 = 4000
4200:8x11= 5775

POTENZE (Lezione III)

La potenza è composta da una base e da un esponente:

base <<< $\mathbf{2^3}$ >> esponente

Due potenze si dicono simili quando hanno lo stesso esponente. 2^5 3^5

Il valore di una potenza equivale alla sua base moltiplicata per se stessa tante volte quante indicate dall'esponente. $\mathbf{2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8}$

Il prodotto di due potenze con la stessa base equivale a una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti.

$3^2 \times 3^4 \times 3^3 = 3^{2+4+3} = 3^9$

Il quoto di due potenze con la stessa base equivale a una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti.

$3^4 : 3^3 = 3^{4-3} = 3^1 = 3$

La potenza di una potenza equivale a una potenza che ha per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti.

$(3^2)^4 = 3^{2x4} = 3^8$

Una potenza con esponente 0 è sempre eguale a 1.

$3^0 = 1$

$(a^2b^3c^4)^0 = 1$

I NUMERI RELATIVI IN ALGEBRA (Lezione IV)

I numeri relativi sono gli stessi che contempla l'aritmetica, ma che in algebra possono assumere anche un valore negativo, i numeri relativi si distinguono in positivi, preceduti da + (+3), e negativi, preceduti da - (-3).

Il valore assoluto di un numero relativo è lo stesso numero considerato senza alcun segno >> |3|

Due numerali relativi si dicono **concordi** se hanno lo stesso segno >> +3, +2

Due numerali relativi si dicono **discordi** se non hanno lo stesso segno >> -3, +2

Due numeri relativi si dicono **opposti** se hanno segno differente ma modulo eguale >> +3, -3

Breve sintesi sulle operazioni tra numeri relativi

1) **+ per/diviso + = +;**
+ per/diviso - = -;
- per/diviso - = +

+3(+2) = +6   +3(-2) = -6   -3(-2) = +6

2) Per svolgere un'espressione algebrica, si ricordi quanto segue.

- Si svolgono i calcoli in successione, prima dentro le parentisi rotonde, poi quadre, poi graffe.
- Hanno precedenza le moltiplicazioni e le divisioni; poi le addizioni.
- Se in una divisione, il divisore o il dividendo, espressi con delle frazioni, è anche fattore di un prodotto, prima si esegue la divisione, poi si passa alla moltiplicazione.

$$\frac{2}{5} : \frac{4}{25} \; \frac{2}{3} = \frac{2}{5} \; \frac{25}{4} \; \frac{2}{3} = \frac{5}{2} \; \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

- Una frazione al divisore diventa un fattore capovolto. $6 : \frac{3}{2} = 6 \; \frac{2}{3} = 4$

- Il segno negativo davanti a una parentesi, cambia il segno al valore che si trova dentro la parentesi.

4

$$- (5-2+3) = 4 - 5 + 2 - 3$$

- Una frazione può essere semplificata (ma si consiglia di farlo sempre per semplificare i calcoli) se numeratore e denominatore sono divisibili per lo stesso numero.

$\frac{21}{14}$ >> (divisibili entrambi per 7) >> $\frac{3}{2}$

- Due fattori costituiti da due frazioni possono essere semplificati (ma si consiglia di farlo sempre per semplificare i calcoli) prima di effettuare il prodotto se i numeratori e i denominatori sono divisibili per lo stesso numero.

$\frac{56}{18}\,\frac{30}{21}$ (30 e 18 sono divisibili per 6) >> $\frac{56}{3}\,\frac{5}{21}$

(56 e 21 sono divisibili per 7) >> $\frac{8}{3}\,\frac{5}{3} = \frac{40}{9}$

- Il prodotto nelle espressioni algebriche non viene più espresso da segno X, ma da un punto o da nessun segno.

$2\,\frac{3}{7} = \frac{6}{7}$ 4bc >> 4(x)b(x)c

CALCOLO LETTERALE (Lezione V)

Spesso al posto dei numeri, le lettere permettono calcoli più spediti; per questa ragione sono state introdotte nel calcolo aritmetico e algebrico.

NOMENCLATURA:

Espressione algebrica irrazionale: contiene lettere sotto il segno di radice.

$$2a + 3a\sqrt{b}$$

Espressione algebrica razionale: non contiene lettere sotto il segno di radice.

$$2a + 3ab$$

Espressione algebrica intera: non contiene lettere al denominatore. $\frac{2a+3ab}{2}$

Espressione algebrica fratta: contiene lettere al denominatore. $\frac{2a+3ab}{b}$

E' monomio l'espressione senza addendi.

coefficiente <<< **2abc³** >>>>> parte letterale

E' polinomio l'espressione dove figurano più monomi in addizione.

$$2abc^3 + 42 - 3c - 7a$$

E' polinomio completo rispetto a una lettera quando gli esponenti di essa vanno decrescendo costantemente di una unità fino all'esponente zero.

$$3x^4-2x^3+7x^2-6x-1$$

Il grado di un monomio intero è dato dalla somma dei gradi delle lettere da cui è composto.

$3a^2b^3c$ >>>> $3+2+1=6$ Il grado di questo monomio è 6

E' polinomio omogeneo se la parte letterale di tutti i monomi da cui è composto, è dello stesso grado.

$3ax^3y^2$ $9a^4xy$ $7a^2x^2y^2$ >>>>

sesto grado $1+3+2=6$; $4+1+1=6$; $2+2+2=6$

Due monomi sono simili se hanno le stesse lettere con gli stessi esponenti.

$2abc^3 \quad 5abc^3 \quad 3abc^3$

Dei monomi simili si possono **sommare** i coefficienti tenendo invariate le lettere.

$2abc^3 + 5abc^3 - 3abc^3 = 4abc^3$

Il **prodotto di due monomi** si ottiene moltiplicando i coefficienti e la parte letterale con la stessa base secondo la regola delle potenze:

$2abc^3 \; (5abc^2) \; (-3abc) = \quad ++- = - \quad 2x5x3 \; a^{1+1+1} \, b^{1+1+1} \, c^{3+2+1} = -30a^3b^3c^6$

- Per il prodotto di un monomio per un polinomio: si moltiplica il monomio per i singoli monomi da cui è composto il polinomio.

$2ab(3ab^2 - 5a^3bc) = 2ab(3ab^2) - 2ab(5a^3bc) = 6a^2b^3 - 10a^4b^2c$

- Prodotto di un polinomio per un altro polinomio: si moltiplicano i singoli monomi del primo polinomio per i singoli monomi da cui è composto il secondo polinomio.

$(a^2b^3 - 2ab)\;(3ab^2 - 5a^3bc) = a^2b^3\,(3ab^2) - a^2b^3\,(5a^3bc) - 2ab(3ab^2) + 2ab(5a^3bc) = 3a^3b^5 - 5a^5b^4c - 6a^2b^3 + 10a^4b^2c$

Il **quoto di due monomi** si ottiene dividendo i coefficienti e la parte letterale con stessa base secondo la regola delle potenze. Per il segno ci si regola come per le moltiplicazioni.

$$2a^4b^3 : 3a^6b = \frac{2}{3}\, a^{4-6}\, b^{3-1} = \frac{2}{3}\, a^{-2}\, b^2$$

- Nel caso in cui al dividendo non compaia una lettera presente nel divisore, la si ipotizza aggiungendola ed elevandola a zero, che equivale a 1 e che perciò non cambia il valore del prodotto.

$$2a^4b^3 : 3a^6bc^2 = 2a^4b^3c^0 : 3a^6bc^2 = \frac{2}{3}\, a^{4-6}\, b^{3-1}c^{0-2} = \frac{2}{3}\, a^{-2}\, b^2c^{-2}$$

- La divisione si può presentare anche sotto forma di frazione: al numeratore il dividendo e al denominatore il divisore. Si procede poi a possibili semplificazioni.

$$2a^4b^3 : 3a^6bc^2 = \frac{2a^4b^3}{3a^6bc^2} = \frac{2b^2}{3a^2c^2}$$

- Moltiplicazione di due frazioni algebriche: si moltiplicano i numeratori per i numeratori e i denominatori per i denominatori.

$$\frac{a^3bc^2}{xy^2z^3}\frac{xa^3b^2}{x^2yb^3} = \frac{a^6b^3c^2x}{b^3x^3z^3y^3}$$

- Divisione di due frazioni algebriche: si moltiplica la prima frazione per l'inverso della seconda.

$$\frac{a^3bc^2}{xy^2z^3} : \frac{xa^3b^2}{x^2yb^3} = \frac{a^3bc^2}{xy^2z^3}\ \frac{x^2yb^3}{xa^3b^2} = \frac{a^3b^4c^2x^2y}{a^3b^2x^2z^3y^2}$$

Il m. c. m. di molteplici monomi si ottiene scomponendo i coefficienti dei singoli monomi in numeri primi per prendere poi i fattori comuni e non comuni con il maggior esponente sia dei coefficienti sia delle lettere.

$4a^2b^3c$, $6a^3bc^3$, $9ab^2c^4$

scomposizione >> $2^2a^2b^3c$, $2x3a^3bc^3$, $3^2ab^2c^4$ m.c.m. >> $2^23^2a^3b^3c^4 = 36\ a^3b^3c^4$

Il M. C. D. di molteplici monomi si ottiene scomponendo i coefficienti dei singoli monomi in numeri primi per prendere poi i fattori comuni con il minor esponente sia dei coefficienti sia delle lettere.

$4a^2b^3c$, $6a^3bc^3$, $18ab^2$

scomposizione >> $2^2a^2b^3c$, $2x3a^3bc^3$, $2x3^2ab^2$ M.C.D. >> $2ab$

LA POTENZA DI UN POLINOMIO equivale al polinomio moltiplicato per se stesso quante volte sono le unità del numero intero espresso dall'esponente.

$$(a+b)^5 = (a+b)\ (a+b)\ (a+b)\ (a+b)\ (a+b)$$

SONO IMPORTANTI I PRODOTTI NOTEVOLI CHE CI PERMETTONO DI SVELTIRE LE OPERAZIONI DI UN'ESPRESSIONE E DI TROVARE IL m.c.m. NELLA SCOMPOSIZIONE IN FATTORI DEI DENOMINATORI DI QUELLE FRAZIONI CHE HANNO AL DENOMINATORE DELLE LETTERE.

Ad esempio: $(a+b)(a-b)$ >> invece di procedere con la moltiplicazione >> $a^2-ab+ab-b^2$ si può scrivere subito

$$\mathbf{(a+b)(a-b)= a^2-b^2} \qquad \mathbf{(1)}$$

e viceversa >>> $\mathbf{a^2- b^2 = (a+b)(a-b)}$

$$\mathbf{(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2} \text{ e viceversa} \qquad \mathbf{(2)}$$

$$\mathbf{(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2} \text{ e viceversa} \qquad \mathbf{(2)}$$

$$\mathbf{(a\pm b)^3= a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3} \text{ e viceversa } \mathbf{(3)}$$

$$\mathbf{(a\pm b+c)^2= a^2+b^2+c^2\pm 2ab+2ac\pm 2bc} \qquad \text{e viceversa} \qquad \mathbf{(4)}$$

$$\mathbf{(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3}$$

$$\mathbf{(5)}$$

$$\mathbf{(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3}$$

<u>PER ELEVARE UN BINOMIO A UN ESPONENTE > 2 oppure > 3, SI USA IL TRIANGOLO DI TARTAGLIA PER DEFINIRNE I COEFFICIENTI MENTRE SI CALANO GLI ESPONENTI DEL PRIMO MONOMIO MENTRE SI AUMENTANO QUELLI DEL SECONDO.</u> <u>Se il secondo monomio è negativo, il risultato inizia con il segno positivo e procede in alternanza con il negativo.</u>

1	Potenza di 0
1 1	Potenza di 1
1 2 1	Potenza di 2
1 3 3 1	Potenza di 3
1 4 6 4 1	Potenza di 4
1 5 10 10 5 1	Potenza di 5
1 6 15 20 15 6 1	Potenza di 6...

$(a\pm b)^5=$ a^5 a^4b a^3b^2 a^2b^3 ab^4 b^5

$= 1a^5 \quad 5a^4b \quad 10a^3b^2 \quad 10a^2b^3 \quad 5ab^4 \quad 1b^5 =$

$= 1a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - 1b^5 =$

$= a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$

COME SI DIVIDE UN POLINOMIO PER UN ALTRO POLINOMIO CON LETTERE EGUALI

$(3a^2+b+c):(2m-b)$ >>

In questo caso le lettere non sono eguali perciò si pone la divisione sotto il segno di frazione >> $\frac{3a^2+b+c}{2m-b}$

Ma nel caso in cui si trovasse: $(6x^5+5x^4-25x^3+31x^2-13x+2):(2x^2-3x+2)$

$6x^5+5x^4-25x^3+31x^2-13x+2 \quad | \ \underline{2x^2-3x+2}$
$\underline{-6x^5 \ 9x^4 \ -6x^3} \qquad |3x^3+7x^2-5x+1$
$\underline{14x^4-31x^3+31x^2-13x+2} \quad |$
$-\underline{14x^4+21x^3-14x^2} \quad |$
$\underline{-10x^3+17x^2-13x+2} \quad |$
$10x^3\underline{-15x^2+10x} \quad |$
$\underline{+2x^2 \ -3x +2} \quad |$
$-\underline{2x^2 \ +3x \ -2} \quad |$
$= \quad = \quad =$

Nel caso in cui mancasse qualche potenza, si può egualmente procedere: $(a^4-b^4):(a-b)$

$a^4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -b^4 \quad | \ \underline{a-b}$
$\underline{-a^4+a^3b} \qquad |a^3+a^2b+ab^2+b^3$
$a^3b \quad |$
$\underline{-a^3b+a^2b^2} \quad |$
$\underline{a^2b^2} \quad |$
$\underline{-a^2b^2 +ab^3} \quad |$
$ab^3 \quad |$
$\underline{-ab^3 \quad + b^4} \quad |$

E' evidente che la divisione può anche avere un resto. In questo caso il risultato è un quoziente e non un quoto.

REGOLA DI RUFFINI

Serve a trovare, senza eseguire la divisione, il quoziente e il resto della divisione di un polinomio intero e completo, ad esempio in riferimento alla lettera x, per il binomio x±a (per "a" s'intende un numero o una lettera).
Se il polinomio non fosse completo, lo si deve rendere tale

($3x^3+2x-1$) >> ($3x^3+ 0x^2+2x-1$)

Esempio: ($3x^3-2x^2+5x+4x^0$):(x-2)

Se la lettera del binomio non avesse coefficiente 1 lo si deve rendere tale, dividendo tutti i monomi per quel coefficiente, il risultato non cambierà, fatta eccezione per un eventuale resto che dovrà essere moltiplicato per il numero o la lettera che ha diviso tutti i termini della divisione.

($3x^3-x^2-x+2$):(2x-3) >> $(\frac{3}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{2}{2}):(x-\frac{3}{2})$

Per la divisione sostanzialmente si procede così:

a) Si trascrivono i coefficienti in orizzontale separando con una linea l'ultimo coefficiente senza lettera.
b) Si lascia sotto lo spazio di un rigo e si traccia una linea a sinistra della quale si pone il secondo termine del binomio cambiato di segno

	3	-2	+5	+4
2				

c) Si cala sotto la linea il primo coefficiente, "3", in questo caso, e lo si moltiplica per il "2". Il risultato si pone sotto il secondo coefficiente con cui si fa somma. Si procede nello stesso modo fino alla fine.

3	-2	+5	+4

|

2 6 8 | 26

coefficienti >>>> 3 4 13 30 >>> resto

Perciò: $(3x^3-2x^2+5x+4x^0):(x-2)= 3x^2+4x+13$ Resto= 30

Prova di verifica: $(x-2)(3x^2+4x+13) +30 = 3x^3-2x^2+5x+4$

$3x^3+4x^2+13x-6x^2-8x-26+30 = 3x^3-2x^2+5x+4;$

$3x^3-2x^2+5x+4 = 3x^3-2x^2+5x+4$ c.v.d.

SCOMPOSIZIONE DI UN POLINOMIO IN FATTORI

E' IMPORTANTE CONOSCERE QUESTE REGOLE CHE PERMETTONO SI SEMPLIFICARE I CALCOLI. Da una somma di monomi si cercano di ottenere dei fattori che poi possono essere semplificati, ad esempio con fattori eguali che si trovano al denominatore. Sappiamo, infatti, che la semplificazione non può avvenire tra addendi. Sostanzialmente ci si deve rifare ai prodotti notevoli usandoli al contrario.

$$\frac{(a+b)(a-b)}{a+b} = (a-b)$$

1) Mettere in evidenza i fattori comuni

$12a^2b^3-6ab^2-18a^2b^5=$

conviene scomporre in fattori anche i coefficienti

>> $2^2 3a^2b^3-(2)3ab^2-3^2 2a^2b^5 = 6ab^2(2ab-1-3ab^3)$

2) Raccogliere parzialmente a fattore comune (qui è necessario valutare tutte le possibilità con un po' di abilità e vedere anche quello che potrebbe essere nascosto)

$an-am+bn-bm$

Si raccoglie dai primi due monomi e b dagli altri due >> $a(n-m) + b(n-m)$

Si raccoglie poi (n-m) che è comune ai due monomi >> (n-m)(a+b)
E' evidente che le cose non si presentano così immediate, il più delle volte è necessario procedere per tentativi
al fine di trovare un polinomio comune e procedere al secondo raccoglimento.

3) In un trinomio della forma $x^2+sx+px$, se è possibile trovare due numeri a e b, la cui somma sia s, e il prodotto p, il trinomio può essere scomposto in **(x+a)(x+b)**

x^2-3x-4 >>> $-4+1=\mathbf{-3}$ $\quad 1(-4)=\mathbf{-4}$ $\qquad$ (x-4)(x+1)

E' bene però aiutarsi con i suggerimenti nascosti, presenti negli esercizi assegnati. In riferimento al precedente polinomio, ad esempio, l'esercizio si potrebbe presentare così: $\frac{x^2-3x-4}{(x-4)}$
Il -4 che si trova al denominatore ci suggerisce di trovare un numero che moltiplicato per -4 dia -4, e sommato a -4, mi dia -3. E' evidente che il numero è 1. Perciò si avrà

$$\frac{(x-4)(x+1)}{(x-4)} = x+1$$

4) Scomporre con la regola di Ruffini polinomi di questa forma: x^3-2x^2-5x+6
I possibili divisori devono essere ricercati tra i divisori di 6 >> ±1; ±2; ±3; ±6
+1 annulla già l'equazione con la sostituzione >> 1-2-5+6 = 0

Si applica così la regola di Ruffini>>

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -2 & -5 & +6 \\ & & & & \\ 1 & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & = \end{array}$$

(x-1)(x^2-x-6)

Il secondo polinomio può essere scomposto di nuovo nello stesso modo con -2

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & -1 & -6 \\ & & & \\ -2 & & -2 & 6 \\ \hline & 1 & -3 & = \end{array}$$

>>>> **(x-1)(x+2)(x-3)**

5) Scomporre con tutti i prodotti notevoli presi al contrario:

$$(a+b)(a-b)= a^2-b^2 \qquad (1)$$

e viceversa >>> $a^2- b^2 = (a+b)(a-b)$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ e viceversa **(2)**

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ e viceversa **(2)**

$(a\pm b)^3= a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$ e viceversa **(3)**

$(a\pm b+c)^2= a^2+b^2+c^2\pm 2ab+2ac\pm 2bc$ e viceversa **(4)**

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$

(5)

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

LE EQUAZIONI

L'equazione è un'eguaglianza fra due espressioni letterali che resta verificata solo per particolari valori attribuiti a tutte o ad alcune lettere.

A esempio, se si ponesse la seguente domanda: qual è il numero che moltiplicato per 72, dà 504?
Assegnando al numero cercato il valore di "x", che per lo più è la lettera, assieme alla "y" e alla "z", che si usa per indicare un'incognita e per impostare un'equazione, si potrà scrivere:

$72 \bullet x = 504$

o più semplicemente: $72x = 504$ >>> $x = \frac{504}{72} = 7$

Impostare dunque in modo corretto un'equazione, vuol dire trovare il valore di una o più incognite e risolvere un problema in modo semplice e veloce.

NOMENCLATURA

- **Equazione numerica:** se vicino alla/e incognita/e figurano solo numeri.
  >> $2x + 3 = 7$

- **Equazione letterale**: se vicino alla/e incognita/e figurano anche altre lettere, chiamate parametri. > $2x+a=7$

- **Equazione intera:** se al denominatore non si trovano incognite. >> $\frac{2}{3}x = 3a$

- **Equazione fratta:** se al denominatore si trovano incognite. >> $\frac{2}{x} = 3a$

- **Equazione razionale**: se l'incognita non si trova sotto il segno di radice.
  >> $x\sqrt{3} = 2a$

- **Equazione irrazionale**: se l'incognita si trova sotto il segno di radice. >> $3\sqrt{x} = 2a$

- **Radice: La/e soluzione/i di una equazione**; i valori cioé che sostituiti all'incognita/e di un'equazione, trasformano l'equazione in un'identità.
- **Equazione determinata:** quando l'equazione ha un numero ben definito di radici.
  $2x=6$ >> $x=\frac{6}{2} = 3$

- Equazione indeterminata: quando l'equazione ammette un numero infinito di radici e si presenta nella formula x = $\frac{0}{0}$.

>> x+5x=6x >> 0x = 0 >> x = $\frac{0}{0}$

- Equazione impossibile: quando l'equazione non ha radici, non ha soluzioni e si presenta nella formula x = $\frac{n}{0}$.

>> 5x= 4x + x -6 >> 0x=-6 >> x=$\frac{-6}{0}$

- Grado di un'equazione: è indicato dal massimo esponente con cui compare l'incognita, dopo aver concluso tutti i calcoli dell'equazione.

- **Equazione prevalente a una seconda:** quando alle radici (soluzioni) della seconda se ne aggiungono altre.

- **Equazione subvalente a un'altra:** quando non ha tutte le radici (soluzioni) dell'altra.

- **Equazione equivalente a un'altra:** quando ha tutte le radici (soluzioni) dell'altra.

PROPRIETA' DELLE EQUAZIONI

- Se a tutti i singoli membri di una stessa equazione si aggiunge o si toglie una stessa espressione algebrica, si ottiene un'equazione equivalente alla data. >> $2x=6$ >> $3 + 2x=6 + 3$

* Perciò si può semplificare per una stessa espressione algebrica che appare nei singoli membri di un'equazione dopo che sono state espletate tutte le operazioni:

$$3ax + 3a(x+1) \cancel{-2a} = 2x - 4ax \cancel{-2a} + x$$

E' errore >> $3ax + 3a(\cancel{x}+1) -2a = 2x - 4ax - 2a + \cancel{x}$

* Un qualsiasi monomio di un'equazione può essere portato da un membro a un altro cambiando il segno:

$3x + 2a - 3 = 2ab + 2b - x$ >> $3x + 2a - 3 + x = 2ab + 2b$

- Se i membri di una stessa equazione si dividono o si moltiplicano per una stessa espressione algebrica che non contenga l'incognita e che non equivalga a zero, si ottiene un'equazione equivalente alla data.

$6x = 2a$ divido entrambe i membri per 2 >> $3x = a$

* Perciò si possono cambiare tutti i segni di un'equazione moltiplicandola tutta per -1.

$6x = 2a$ >> $-6x = -2a$

* Riducendo tutta l'equazione a denominatore comune, lo si può eliminare, moltiplicando l'equazione per lo stesso denominatore. Così pure si può eliminare un fattore comune alle stesse condizioni.

$$\frac{3x+2a-3}{3ab} = \frac{2ab+2b-x}{3ab} \quad >>>> \quad 3x + 2a - 3 = 2ab + 2b - x$$

COME SI RISOLVE UN'EQUAZIONE

a) Si svolgono le operazioni come in una qualsiasi espressione letteraria.
b) si portano i termini con l'incognita a sinistra del segno di eguale, e gli altri a destra.
c) Si applicano tutte le semplificazioni possibili, secondo le proprietà delle equazioni.
d) Il valore dell'incognita corisponde a una frazione che ha per numeratore i termini a destra del segno di eguale (dove non appare l'incognita) e per denominatore il coefficiente dell'incognita.

$$(3ab+4c)x = 7b-ab \quad >> \quad x = \frac{7b-ab}{3ab+4c}$$

VERIFICA: Si sostituisce il valore trovato all'incognita: se il valore è esatto, l'equazione si trasforma in una identità.

$2x = 6$ >> $x = \frac{6}{2} = 3$ si sostituisce 3 a x >> $2 \cdot 3 = 6$ >> Esatto

DISCUSSIONE

Si rende necessaria la discussione che pone delle condizioni, nelle espressioni dove compaiono delle lettere/paranetri, ricordando che:

- Numeratore = 0 >> x = 0 (equazione determinata)
- Denominatore = 0 >> equazione impossibile
- Numeratore e denominatore = 0 >> equazione indeterminata
- Numeratore e denominatore ≠ 0 >> equazione determinata

* **Nelle equazioni intere** (dove non si trovano cioé lettere al denominatore, la formula finale si presenta in questo modo**:** **ax = b >>** $\boldsymbol{x = \frac{b}{a}}$

Se a = b = 0 >>>> indeterminata
Se a = 0 e b ≠ 0 >>> impossibile
(Se a ≠ 0 e b = 0 >>> x = 0 equazione determnata)
Se a ≠ 0 e b ≠ 0 >>> equazione determinata

$$a(a+1)(a-1)x = a-1 \quad >> \quad x = \frac{a-1}{a(a+1)(a-1)}$$

Discussione: a=1 indeterminata
a=-1; a=0 >> impossibile

a ≠ -1; a ≠ 0; a ≠ 1 >>   determinata

* Nelle **equazioni fratte** (dove si trovano cioé le lettere al denominatore) è necessario porre delle condizioni quando si è ridotto a comune denominatore affinché i singoli fattori non abbiano valore zero, altrimenti l'equazione **perde significato.** In questo modo si verificano le **condizioni di esistenza (CE).** Tali condizioni si possono definire ancora prima di arrivare al mcd, valutando i denominatori delle singole frazioni.

$\frac{ax}{a+2} - \frac{b}{a+1} - \frac{c}{a-2} = 1; \qquad \frac{-------}{(a+2)(a+1)(a-2)}$

Perché l'equazione non perda significato devono essere poste le condizioni di esistenza: $a \neq \pm 2$; $a \neq -1$.

Solo a queste condizioni si può procedere ad annullare il minimo comune denominatore e arrivare alla formula ax = b >> $x = \frac{b}{a}$ dove si procederà come sopra.

* Nelle **equazioni frazionarie** (dove si trova cioé l'incognita al denominatore) si procede come prima, ma questa volta si fa riferimento alle **condizioni di accettabilità (CA)**. Se eventualmente la soluzione dell'equazione ricadesse proprio in una CA, l'equazione risulterebbe **impossibile**. Nel caso invece che l'equazione fosse **indeterminata**, le soluzioni si possono definire infinite a eccezione di quelle rilevate dalle CA.

* Nelle equazioni letterali frazionarie è necessario **verificare sempre** l'accettabilità delle soluzioni trovate.

DIVERTIRSI CON LE EQUAZIONI

(I politici si divertono senza conoscere le equazioni)

altro che settimana enigmistica!!

Eppure con le equazioni si possono risolvere tantissimi problemi apparentemente privi di soluzione o del tutto astrusi.

Solo alcuni esempi:

1) Qual è il numero il cui quadruplo, più la sua metà, meno 70, dà il numero stesso?

Numero cercato = X >> $4x + \frac{x}{2} - 70 = x$ >> $4x - x + \frac{x}{2} = 70$ > $\frac{8x - 2x + x}{2} = \frac{140}{2}$

$8x - 2x + x = 140$ >> $7x = 140$ >>> $x = \frac{140}{7} = \mathbf{20}$

Verifico e sostituisco 20 a x della prima espressione, effettuando già le operazioni >>> 80+10-70=20 > esatto!

2) Un padre ha 57 anni, il figlio 30. Fra quanti anni l'età del padre sarà quadrupla di quella del figlio?

$57+x = 4(30 + x)$ >> $57 + x = 120 + 4x$ >> $3x = -63$ >>> $x = -21$

Il risultato soddisfa l'equazione ma non il problema che non ha una soluzione nel futuro. Il segno meno ci suggerisce però di cercare nel passato questo rapporto. Infatti, se a 57 tolgo 21 anni, ho 36; se a 30 tolgo 21 anni, ho 9. Ebbene 21 anni prima il padre aveva un'età quadrupla a quella del figlio: 36 >> 9.

3) Trovare un numero del quale i $\frac{3}{4}$, diminuiti dei $\frac{5}{24}$, diano i $\frac{13}{24}$ del numero stesso.

$\frac{3}{4}x - \frac{5}{24}x = \frac{13}{24}x$ >> $\frac{3}{4}x - \frac{5}{24}x - \frac{13}{24}x = 0$ $18x - 5x - 13x = 0$ >> $0x = 0$ >>

$x = \frac{0}{0}$ >> <u>Indeterminata</u>

Il problema ammette infinite soluzioni, cioé qualsiasi numero può soddisfare alle condizioni poste.

4) Qual è il numero che dà lo stesso risultato sia se gli si aggiunge 4, sia se gli si toglie tre.

$x + 4 = x - 3$ >> $x - x = -7$ >> $x = \frac{-7}{0}$ >> <u>Impossibile</u>

Il problema non ammette soluzioni

SISTEMA DI EQUAZIONI

Il sistema di due equazioni a due incognite è l'insieme delle due equazioni che soddisfano in contemporanea agli stessi valori attribuiti alle stesse incognite.

Il grado di un sistema è il prodotto dei gradi delle singole equazioni che lo costituiscono. Se le equazioni sono entrambi di I°, 1x1=1, il sistema sarà di I°. Se un'equazione è di II° e l'altra di I°, 2x1=2, il sistema è di II°.

Determinato, impossibile, indeterminato è un sistema che ha equazioni determinate, impossibili, indeterminate.

Un sistema può anche essere a tre o più incognite, in questo caso appaiono tre o più equazioni a costituire il sistema.

COME RISOLVERE UN SISTEMA A DUE INCOGNITE

a) Sostituzione (presento esempi pratici)

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$$

Si trova il valore di x in funzione di y nella prima equazione. Ma ovviamentesi potrebbe trovare il valore di y in funzione di x. E si trascrive la seconda

$$\begin{cases} x = \frac{7-3y}{2} \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$$

Si sostituisce x, così trovata, a x della seconda equazione e si ritrascrive la prima

$$\begin{cases} x = \frac{7-3y}{2} \\ 4\,\frac{7-3y}{2} - 5y = 3 \end{cases}$$

Si è ridotta così la seconda equazione a una sola incognita che può essere
che può essere determinata, ritrascrivendo sempre la prima.

$$\begin{cases} x = \frac{7-3y}{2} \\ 14 - 6y - 5y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{7-3y}{2} \\ -11y = -11 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{7-3y}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

si sostituisce il valore di y nella prima e si trova x.

$x = \frac{7-3}{2}$ **x = 2**

y = 1 **y = 1**

b) Confronto

2x + 3y = 7 Si trova il valore di x in funzione di y in entrambe le equazioni.

4x - 5y = 3 Ovviamente si può trovare il valore di y in funzione di x in entrambe le equazioni.

$x = \frac{7-3y}{2}$ Si portano a eguaglianza le x così definite e si trascrive uno dei valori

$x = \frac{3+5y}{4}$ di x scegliendo l'espressione più semplice.

$x = \frac{7-3y}{2}$ $x = \frac{7-3y}{2}$ $x = \frac{7-3y}{2}$ $x = \frac{7-3y}{2}$

$\frac{7-3y}{2} = \frac{3+5y}{4}$ 14 - 6y = 3 + 5y -6y - 5y = 3 - 14 y = 1

Si sostituisce y nella prima. $x = \frac{7-3}{2}$ **x = 2**

y = 1 **y = 1**

c) Metodo di addizione/sottrazione

2x + 3y = 7 Si fa in modo che sommando le due equazioni si annulli x oppure y.

4x - 5y = 3 Per la proprietà delle equazioni se si moltiplica tutta l'equazione per lo stesso numero, il valore dell'equazione rimane, invariato. Si potrebbe dunque moltiplicare la prima per -2, così -4x e +4x si annullerebbero. Oppure la prima per 5 e la seconda per 3, così 15y e - 15y si annullerebbero. Si opta per la soluzione più semplice.

(-2) -4x - 6y = -14 Si sommano le equazioni e si trascrive l'equazione più semplice

<u>4x - 5y = 3</u> prima di essere stata moltiplicata.

-11y = -11 >> **y = 1** e si procede nelle sostituzioni come nei casi precedenti

d) Metodo di Kramer

Valutiamo il seguente sistema ridotto a forma canonica:

$$ax + by = c$$
$$a'x + b'y = c'$$

Si definisce **determinante** del sistema, **ab' - a'b,** cioè la differenza dei prodotti in croce dei coefficienti delle incognite che è indicata con il seguente segno: **Δ** e viene scritta così:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

Si definisce **determinante x** del sistema, **cb' - c'b,** cioè, la differenza dei prodotti in croce dei termini noti e dei coefficienti corrispondenti dell'incognita y, ed è indicata con il seguente segno: **Δ(x)** e viene scritta così:

$$\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$$

Si definisce **determinante y** del sistema, **ac' - a'c,** cioè la differenza dei prodotti in croce dei coefficienti e dei termini noti e corrispondenti dell'incognita x, ed è indicata con il seguente segno: **Δ(y)** e viene scritta così:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$$

Le soluzioni del sistema sono le seguenti: $x = \frac{\Delta(x)}{\Delta}$ $y = \frac{\Delta(y)}{\Delta}$

2x + 3y = 7
4x - 5y = 3

$$x = \frac{\begin{matrix} 7 & 3 \\ 3 & -5 \end{matrix}}{\begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{matrix}} = \frac{-35 - 9}{-10 - 12} = \frac{-44}{-22} = \mathbf{2}$$

$$y = \frac{\begin{matrix} 2 & 7 \\ 4 & 3 \end{matrix}}{\begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{matrix}} = \frac{6 - 28}{-10 - 12} = \frac{-22}{-22} = \mathbf{1}$$

<u>DISCUSSIONE</u>

A) Indeterminato è un sistema a due incognite quando i coefficienti delle incognite e i termini noti sono proporzionali tra di loro. Sostanzialmente le due equazioni sono eguali.

$2x + 5y = 12$
$4x + 10y = 24$ Se si procede a una semplificazione nella seconda, dividendo tutto per 2, si ha:

$2x + 5y = 12$
$2x + 5y = 12$ Se poi si procede con il metodo della sottrazione, si ha:

$2x + 5y = 12$
$\underline{2x + 5y = 12}$
$0x\ 0y = 0$ >> $x = \frac{0}{0}$ e pure $y = \frac{0}{0}$

B) Impossibile è un sistema a due incognite quando i coefficienti delle incognite ma non i termini noti sono proporzionali tra di loro.

$4x + 2y = 10$ >>> $\frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
$8x + 4y = 12$ Se si procede per sottrazione moltiplicando per 2 la prima equazione, si ha:

$8x + 4y = 20$
$\underline{8x + 4y = 12}$
$0x + 0y = 8$ >> $x = \frac{8}{0}$ e pure $y = \frac{8}{0}$

C) Determinato è un sistema a due incognite quando i coefficienti delle incognite non sono proporzionali tra di loro.

$2x + y = 9$
$3x - y = 6$ Si può procedere con il metodo dell'addizione.

$2x + y = 9$
$\underline{7x - y = 6}$
$9x \quad = 15$ >> $x = \frac{5}{3}$ $\quad 2\,\frac{5}{3} + y = 9$ $\quad 30 + 3y = 27$ $\quad y = -1$

Infatti, come verifica, se si sostituisce alla prima i valori trovati, si ha

$2\,\frac{5}{3} - 1 = 9$ $\quad 30 - 3 = 27$ c.v.d.

<u>DIVERTIRSI CON I SISTEMI</u> (I politici si divertono senza conoscere i sistemi)

altro che settimana enigmistica!!

1) Se Alessandro fosse morto 9 anni prima, avrebbe regnato un ottavo di quanto visse; se invece fosse morto 9 anni dopo, avrebbe regnato la metà di quanto visse. Quanto regnò e quanto visse?

Anni di vita = X
Anni di regno = Y

$y - 9 = \frac{1}{8}x$ $\quad$ $8y - 72 = x$ $\quad$ $6y - 90 = 0$ $\quad$ $y = 15$

$y + 9 = \frac{1}{2}x$ $\quad$ $2y + 18 = x$ $\quad$ $2y + 18 = x$ $\quad$ $x = 48$

2) In una riunione di uomini e donne vien fatta una colletta: ogni donna mette 10 euro, ogni uomo 30. Trovare il numero degli uomini e delle donne, sapendo che il numero totale dei partecipanti è di 35 e che la colletta frutta 750 euro.

Numero donne = X
Numero uomini = Y

$10x + 30y = 750$ $\quad$ $10x + 30y = 750$ $\quad$ $20y = 400$ $\quad$ $y = 20$

-10 $\quad$ $x + y = 35$ $\quad$ $-10x - 10y = 350$ $\quad$ $x + y = 35$ $\quad$ $x = 15$

3) Un fanciullo dice: "Il numero dei miei fratelli è la metà di quello delle mie sorelle". "e io, replica una sua sorella, ho tanti fratelli quante sorelle". Quanti fratelli e quante sorelle conta quella famiglia?

Numero dei fratelli = X $\quad$ $x - 1 = \frac{y}{2}$ $\quad$ $y - 1 - 1 = \frac{y}{2}$ $2y - 4 = y$ $\quad$ $y = 4$

Numero delle sorelle= Y $\quad$ $x = y - 1$ $\quad$ $x = y - 1$ $\quad$ $x = y - 1$ $\quad$ $x = 3$

4) Il perimetro di un rettangolo misura 98 cm e il rapporto tra i lati è nove quarantesimi. Calcolare l'area e la misura della sua diagonale.

Primo lato = X $\quad$ $2x + 2y = 98$ $\quad$ $x = 49 - y$ $\quad$ $x = 49 - y$

$x = 49 - y$ $\quad$ $x = 9$

Secondo lato = Y $\frac{x}{y} = \frac{9}{40}$ $\quad$ $40x = 9y$ $\quad$ $40(49 - y) = 9y$ $\quad$ $y = 40$

$y = 40$

A= 40 x 9 = 360 cm^2 $\quad$ $d = \sqrt{40^2 + 9^2} = \sqrt{1681} = 41$ cm

5) Un padre, interrogato sull'età dei suoi figli, risponde: "Mia figlia ha tre volte l'età che essa aveva quando mio figlio aveva l'età che ha adesso mia figlia; e quando mia figlia avrà l'età che ha ora mio figlio, tutti e due avranno 48 anni". Qual è l'età del figlio e quale quella della figlia?

	Età passata	Età attuale		Età futura
Figlia	$\frac{x}{3}$	X	y -x	
Figlio	$y - \frac{2}{3}x$	Y		
Somma				48

$x = y - \frac{2}{3}x$ $\quad$ $5x - 3y = 0$ $\quad$ $5x - 3y = 0$ $\quad$ $5x - 3y = 0$ $\quad$ $y = 20$

$x + y + 2(y - x) = 48$ $\quad$ $x + y + 2y - 2x = 48$ $\quad$ $-x + 3y = 48$ $\quad$ $4x = 48$ $\quad$ $x = 12$

/ **INTERI** o CARDINALI >>>> 3, 21, 80, 43...
/
/
Qualsiasi numero che possa essere **<<RAZIONALI --** **DECIMALI FINITI** >>>> 3,4 >> $\frac{3}{10}$
espresso con frazione a termini interi \
/ \
/ \ **DECIMALI PERIODICI** >>> 3,76 >> $\frac{3\overline{76}-3}{99}$
/
/In blu il periodo; in rosso l'antiperiodo **2**,0745 >> $\frac{20745-207}{9900}$
REALI
\
\
\ **IRRAZIONALI** > è un numero decimale illimitato > 3, 567890123...
/
/
/
I NUMERI
\
\ / **IMMAGINARI** >>> √-1 = i
\ /
NON
REALI \
\ **COMPLESSI** >>> 4 + 3i (reale+immaginario)

RADICALI

n >> indice
$\sqrt{a}$ >> radicando **indice + radicando = radice**

(se l'indice di una radice è eguale a 2, l'indice può essere sottointeso)

<u>Come la divisione è l'operazione opposta alla moltiplicazione e la sottrazione all'addizione, così la radice è l'operazione opposta alla potenza.</u>

$$\pm 2^2 = 4 \qquad \sqrt[2]{4} = \pm 2$$

Per questa ragione se un numero è allo stesso tempo, elevato a n e posto sotto una radice con indice n, radice e potenza si annullano. Perciò La radice ennesima, elevata alla potenza ennesima, di un numero è eguale al numero stesso.

$$(\sqrt[n]{a})^n = a \quad >> \quad (\sqrt[2]{3})^2 = 3$$

1) indice pari e radicando positivo >>> $\pm x$ >> $\sqrt[2]{4} = \pm 2$

2) indice dispari e radicando positivo >>> x >> $\sqrt[3]{27} = +3$

3) indice dispari e radicando negativo >>> $-x$ >> $\sqrt[3]{-27} = -3$

4) Indice pari e radicando negativo >>> non esiste (immaginario) $\sqrt{-4} = 2i$

PROPRIETA' DEI RADICALI

1) **Proprietà invariantiva**: Se si moltiplica o si divide l'indice di una radice e l'esponente del radicando per lo stesso numero intero positivo, il valore della radice non cambia.

$$\sqrt[2]{5^3} = \sqrt[2x2]{5^{3x2}} \qquad \sqrt[2]{5^3} = \sqrt[2:2]{5^{3:2}}$$

Dalla proprietà invariantiva segue la **possibilità di semplificare** le radici quando indice ed esponente hanno fattori comuni nella loro scomposizione in fattori primi.

$$\sqrt[20]{a^8} = \sqrt[2x2x5]{a^{2x2x2}} = \sqrt[5]{a^2}$$

2) Riduzione di più radicali allo stesso indice. Si procede come per la somma di frazioni con denominatori differenti: m.c.m. Qui, invece dei denominatori, abbiamo gli indici e invece dei numeratori, il radicando.

$$\sqrt[2]{a};\ \sqrt[6]{b};\ \sqrt[4]{c^2}. \ >>> \qquad \sqrt[12]{a^6};\ \sqrt[12]{b^2};\ \sqrt[12]{c^6}.$$

3) La moltiplicazione di radicali con lo stesso indice e eguale a una radice con lo stesso indice e con radicando eguale al prodotto dei radicandi. Se i radicali non dovessero avere lo stesso indice, è necessario ridurre i radicali allo sttesso indice prima di procedere alla moltiplicazione (si veda 2).

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{abc}$$

4) La divisione di radicali con lo stesso indice e eguale a una radice con lo stesso indice e con radicando eguale al quoto dei radicandi. Se i radicali non dovessero avere lo stesso indice, è necessario ridurre i radicali allo sttesso indice prima di procedere alla divisione (si veda 2).

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

5) **Si possono portare sotto radice o fuori solo i FATTORI MAI GLI ADDENDI.**
Per portare un fattore sotto radice è sufficiente elevarlo per l'indice della radice dentro cui lo si vuole portare. **Per esportare un fattore da sotto radice**, il fattore del radicando deve avere un esponente maggiore dell'indice: a questo punto si divide l'esponente per l'indice, il risultato dà l'esponente da attribuire al fattore fuori radice, il resto, se c'è, è l'esponente da attribuire al fattore sotto radice.

$$a^2bc^3 \sqrt[3]{abc^{2-}} >> \sqrt[3]{a^6b^3c^9\, abc^2} >>> \sqrt[3]{a^7b^4c^{11}}$$

$$\sqrt[2]{a^5b^3} >>> (5:2=2\ \ R=1;\ \ 3:2=1\ \ R=1) >> a^2b\sqrt{ab}$$

6) La radice di un radicale è eguale ha un radicale con lo stesso radicando e con indice eguale al prodotto dei singoli indici.

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{a^2}b^5} >> \sqrt[6]{a^2}b^5$$

7) La somma di radicali si può effettuare solo quando i radicali sono eguali e allora si comportano come se fossero dei valori letterari e si sommano i coefficienti.

$$2\sqrt{3a} + 5\sqrt{3a} = 7\sqrt{3a}$$

8) Formula per svolgere i radicali doppi.

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

9) Razionalizzazione di un radicale: vuol dire togliere dal denominatore di una frazione possibili radicali.

a) $\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^m}\,\sqrt[n]{a^{n-m}}}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^{3-2}}}{\sqrt[3]{a^2}\,\sqrt[3]{a^{3-2}}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2\,a}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^3}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a}$

c) $\frac{a^2}{\sqrt[5]{a^3}} = \frac{a^2}{\sqrt[5]{a^3}}\,\frac{\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[5]{a^2}} = \frac{a^2\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[5]{a^5}} = \frac{a^2\sqrt[5]{a^2}}{a}$

d) $\frac{b^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{b^2(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\,(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{b^2(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2} = \frac{b^2(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$

d2) $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}} = \frac{2[(\sqrt{3}+\sqrt{2})+\sqrt{5}]}{[(\sqrt{3}+\sqrt{2})-5][(\sqrt{3}+\sqrt{2})+\sqrt{5}]} = \frac{[(\sqrt{3}+\sqrt{2})+\sqrt{5}]}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-5^2} = \frac{[(\sqrt{3}+\sqrt{2})+\sqrt{5}]}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-25} =$

$\frac{[(\sqrt{3}+\sqrt{2})+\sqrt{5}]}{3+2+2\sqrt{6}-25} = \frac{[(\sqrt{3}+\sqrt{2})+\sqrt{5}]}{2\sqrt{6}-20}$ >> (d)

e) $\frac{2}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}} = \frac{2\,(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{2^2})}{(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{2^2})} = \frac{2\,(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{2^2})}{\sqrt[3]{3^3}-\sqrt[3]{2^3}} = \frac{2\,(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{2^2})}{3-2} =$

$2\,(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{2^2})$

$(a \pm b)\,(a^2 \pm ab + b^2) = (a^3 \pm b^3)$

10) Potenze con esponente frazionario

$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$

11) Potenze con esponente negativo

$a^{-3} = \frac{1}{a^3}$

12) Numeri immaginari

$\sqrt[2]{-4} = i2$

<u>COME SI ESTRAE UNA RADICE QUADRATA</u>

$\sqrt{1287538}$ Si separano le cifre a due a due, partendo da destra.

√1 28 75 38|___1

Si cerca la prima cifra che elevata al quadrato sia eguale o inferiore al primo gruppo selezionato; in questo caso al numero 1, e non potrà essere che 1 e si trascrive a destra come prima cifra del risultato.

√1 28 75 38| 1________
---1 | 2
---0 2.8

Si eleva la cifra così trovata al quadrato e si trascrive il risultato sotto il primo gruppo del radicando. In questo caso1 X 1 = 1, e si sottrae; in questo caso con risultato = 0. La stessa cifra si raddoppia e il risultato sarà trascritto immediatamente sotto alla cifra suddetta. Si abbassa il successivo gruppo del radicando (28) e si isola l'ultima cifra (8).

√1 28 75 38| 1 1________
1___ | 21X1= 21
0 2.8

Ci si chiede allora quante volte la cifra abbassata (2) stia nel numero (28) riportato e depauperato della ultima cifra (8). In questo caso 2 sta nel 2, 1 volta sola. Si trascrive 1 vicino alla cifra raddoppiata e si moltiplica per lo stesso 1. In questo caso 21 X 1 = 21. A questo punto ci si chiede se 21 stia dentro al 28. La risposta è affermativa. Allora si adotta il numero (1) come seconda cifra del risultato.

√1 28 75 38|1 1 34__________
1___ | 21x1 = 21
0 2.8 | 223x3=669
___21___ | 2264x4=9056
0 77.5
669___
106 3.8
___9056
1582

Al 28 si sottrae il 21 e si calano le altre due cifre (75), isolando l'ultima. Si raddoppia 11 (22) e si riporta sotto procedendo alla stessa maniera: quante volte può stare il 22 nel 77? La risposta è 3, che si mette vicino al 22 >> 223 che si moltiplica per 3 = 669 e ci si chiede se 669 sia contenuto nel 775. La risposta è positiva, perciò 3 diventa la terza cifra del risultato. Si procede come sopra. Se i prodotti prima con il 3 e poi con il 4, avessero dato dei risultati superiori, allora si sarebbe dovuto provare con numeri decrescenti di una unità alla volta >> 4, 3, 2, 1.

EQUAZIONI DI II°

Si definisce "equazione di II°" a una incognita ogni equazione che possa essere trasformata in un'altra equivalente, sotto la seguente forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Dove a ≠ 0 perché altrimenti si ridurrebbe a una equazione di I° (bx + c = 0)

Se b = 0 >>> Equazione pura

Se c = 0 >>> Equazione spuria

COME SI RISOLVE L'EQUAZIONE PURA:

$ax^2 + c = 0 \quad x^2 = -\frac{c}{a} \quad x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ **Se** $-\frac{c}{a} > 0$ **Le soluzioni sono reali**

Se $-\frac{c}{a} < 0$ **Le soluzioni sono immaginarie**

$4x^2 - 100 = 0 \quad x^2 = \pm\sqrt{\frac{100}{4}} \quad x = \pm 5$ **>> due soluzioni reali**

$4x^2 + 100 = 0 \quad x^2 = \pm\sqrt{-\frac{100}{4}} \quad x = \pm 5i$ **>> due soluzioni immaginarie**

COME SI RISOLVE L'EQUAZIONE SPURIA:

$ax^2 + bx = 0$ **Si pone in evidenza la x >>** $x(ax + b) = 0 \quad x = 0 \quad x = -\frac{b}{a}$

Se il prodotto di due fattori è zero, o l'uno o l'altro sarà uguale a zero: l'equazione si scompone così in due equazioni di I° dove una soluzione è sempre eguale a 0.

$3x^2 + 9x = 0 \quad x(3x + 9) = 0 \quad x = 0 \quad 3x + 9 = 0 \quad x = -\frac{9}{3} = -3$

RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE COMPLETA $ax^2 + bx + c = 0$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$3x^2 + 5x - 2 = 0 \quad x = \frac{-5 \pm\sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} = \quad x_1 = -2 \quad x_2 = \frac{1}{3}$

<u>Discussione</u>

Si ponga $b^2 - 4ac = \Delta$ (discriminante)

Se $\Delta > 0$	**Le soluzioni sono diverse e reali** (si veda la precedente come esempio)
Se $\Delta = 0$	**Le soluzioni sono corrispondenti**
Se $\Delta < 0$	**Le soluzioni sono complesse coniugate**

$4x^2 + 4x + 1 = 0$ $\quad x = \frac{-4 \pm\sqrt{16-16}}{8} \quad x = \frac{-4 \pm 0}{8} \quad x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$

$x^2 - 4x + 13 = 0$ $\quad x = \frac{4 \pm\sqrt{16-52}}{2} = \frac{-4 \pm\sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} \quad x_1 = 2+3i$

$x_2 = 2-3i$

<u>DISCUSSIONE</u>

La discussione ricalca le regole già definite, per l'incognita al denominatore e per i valori letterali ai denominatori e finali, nelle equazioni di I° (si veda nelle lezioni precedenti). La differenza sta nel fatto che qui troviamo due soluzioni di cui una può anche essere accettata e l'altra no, o accettata a particolari condizioni. Si valutino perciò tutte le Condizioni di Accettabilità e le Condizioni di Esistenza, CA e CE.

<u>RELAZIONI FRA RADICI E COEFFICIENTI DI UN'EQUAZIONE DI SECONDO GRADO</u>

<u>La somma delle radici di un'equazione di II° è eguale all'antiprodotto (cioè al rapporto cambiato di segno) tra il secondo coefficiente e il primo.</u>

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

<u>Il prodotto delle radici di un'equazione di II° è eguale al rapporto tra il termine noto e il primo coefficiente.</u>

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

<u>APPLICAZIONI</u>

1) Calcolo di una radice di II° conoscendo l'altra radice:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 = -\frac{b}{a} - x_2$$

2) Si noti come in entrambe le frazioni della somma e del prodotto, a è al denominatore. Se perciò a = 1 (e sempre può essere ridotto all'unità dividendo gli altri coefficienti per a), il secondo coefficiente è eguale alla somma delle radici cambiata di segno, il termine noto al prodotto delle radici.

$$x^2 - sx + p = 0$$

Ne segue perciò che dalle due radici x_1 e x_2 si può ricostruire l'equazione d'origine.

siano $x_1 = -2$ e $x_2 = \frac{7}{3}$ $s = \frac{1}{3}$ $p = -\frac{14}{3}$

Questa l'equazione d'origine: $x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{14}{3} = 0$ $3x^2 - x - 14 = 0$

A che cosa potrebbe servire conoscere questi rapporti tra radici, somma di radici e prodotto di radici?

Poniamo che un falegname voglia realizzare un tavolo rettangolare e debba determinare quale misura assegnare ai singoli lati perché la superficie (prodotto dei lati) sia la più estesa possibile data un'ipotetica somma dei lati.

Nell'equazione suddetta: $\mathbf{x^2 - sx + p = 0}$

perché le soluzioni siano reali, il $\Delta \geq 0$ perciò: $\Delta = s^2 - 4p \geq 0$ $p \leq \frac{s^2}{4}$

Si ricordi che p corrisponde alla superficie del tavolo. La superficie massima realizzabile dalla formula, risulta:

$p = \frac{s^2}{4}$ ossia quando il $\Delta = 0$ e le radici sono eguali. Data quindi la somma dei lati di un rettangolo, la superficie maggiore che posso ottenere è quando il rettangolo è un quadrato.

<u>REGOLA DI CARTESIO</u>

Si possono conoscere i segni delle radici reali ($\Delta > 0$) di un'equazione di II° dai segni dei suoi coefficienti. Si omette la dimostrazione.

$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ >> $-x_1$ $-x_2$
$\mathbf{ax^2 - bx + c = 0}$ >> $+x_1$ $+x_2$
$\mathbf{ax^2 + bx - c = 0}$ >> $-x_1$ $+x_2$
$\mathbf{ax^2 - bx - c = 0}$ >> $+x_1$ $-x_2$

A ogni permanenza di segno nell'equazione, si ha il segno negativo nelle radici, a ogni variazione un segno positivo.

<u>SCOMPOSIZIONE DI UN TRINOMIO</u>

Con le regole precedenti si può scomporre un trinomio di II° in fattori uguagliando il trinomio a 0 e risolvendo l'equazione.

$\mathbf{ax^2 + bx + c}$ $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ >> $\mathbf{a (x - x_1)(x - x_2)}$

Si tralascia qui la dimostrazione che però passa attraverso la regola della somma e del prodotto x_1 / x_2

$9x^2 + 3x - 2$ **$9x^2 + 3x - 2 = 0$** **$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+72}}{18}$** **$x_1 = \frac{-3+9}{18} = \frac{1}{3}$** **$x_2 = \frac{-3-9}{18} = -\frac{2}{3}$**

$9x^2 + 3x - 2 = 9(x - \frac{1}{3})(x + \frac{2}{3}) = (3x - 1)(3x + 2)$

<u>TEOREMA FONDAMENTALE</u>

(Studio del segno di un <u>trinomio</u> finalizzato alla soluzione delle disequazioni)

$\Delta > 0$ Segno eguale a quello del I° coefficiente per valori attribuiti alla x **$< x_1 \quad > x_2$**

Segno contrario a quello del I° coefficiente per valori attribuiti alla x **$x_1 < x < x_2$**

Si annulla per valori eguali a x_1 e x_2

$\Delta = 0$ Segno eguale a quello del I° coefficiente per qualsiasi valore attribuito alla x

Si annulla per valori eguali a $-\frac{b}{2a}$

$\Delta < 0$ Segno eguale a quello del I° coefficiente per qualsiasi valore reale attribuito alla x

$x^2 - 4x + 4 = 0$ $\Delta = 16 - 16 = 0$

Il trinomio è sempre positivo (eguale al segno del I° coefficiente) tranne per $x = \frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$ dove si annulla.

$x^2 - 2x + 9 = 0$ $\Delta = 4 - 36 = -32 < 0$

Il trinomio è sempre positivo (eguale al segno del I° coefficiente) per qualsiasi valore reale attribuito alla x

$6x^2 - x - 1 = 0$ $\Delta = 1 + 24 = 25 > 0$ $x_1 = \frac{1}{2}$ $x_2 = -\frac{1}{3}$

Il trinomio è sempre positivo (eguale al segno del I° coefficiente) per qualsiasi valore reale attribuito alla x

$x < -\frac{1}{3}$ $x > \frac{1}{2}$

Il trinomio è sempre negativo (opposto al segno del I° coefficiente) per qualsiasi valore reale attribuito alla x

$-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$

EQUAZIONI TRINOMIE

Sono le equazioni che si presentano sotto questa formula e sostanzialmente sono di IV°:

$$a\, f^2(x) + b\, f(x) + c = 0$$

$(x^2 + 3x + 3)^2 - 4(x^2 + 3x + 3) + 3 = 0$

$x^2 + 3x + 3 = y$

$y^2 - 4y + 3 = 0$ Risolvendo>> $y_1 = 1$ $y_2 = 3$

Sostituendo:

$x^2 + 3x + 3 = 1$ $x^2 + 3x + 3 = 3$

e risolvendo

$x_1 = 0$ $x_2 = -3$ $x_3 = -2$ $x_4 = -1$

EQUAZIONE BIQUADRATICA ELEMENTARE

La forma normale è la seguente: $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Sostanzialmente si risolve come l'equazione trinomia >> $x^2 = y$

$ay^2 + by + c = 0$

$16x^4 - 17x^2 + 1 = 0$ $x^4 = y$ $16y^2 - 17y + 1 = 0$ svolgendo:

$y_1 = 1$ $y_2 = \frac{1}{16}$ >>>>>> x_1 e $x_2 = \pm \mathbf{1}$ x_3 e $x_4 = \pm \frac{1}{4}$

ABBASSAMENTO DI GRADO DI UN'EQUAZIONE

Ogni volta che un'equazione superiore al II° può essere scomposta in fattori, i due o più fattori ottenuti possono essere eguagliati a zero, dando origine ad altrettante equazioni di grado inferiore.

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ Scomponendo in questo caso con la regola di Ruffini, si ottiene:

$(x - 1)(x^2 - x - 6) = 0$ $x - 1 = 0$ $\mathbf{x_1 = 1}$

$x^2 - x - 6 = 0$ svolgendola >> $\mathbf{x_2 = -2}$ >> $\mathbf{x_3 = 3}$

EQUAZIONI RECIPROCHE

NOMENCLATURA:

- Sono Coniugati in un polinomio di grado n, tutti i suoi termini la cui somma dei gradi è n

$x^5 + 4x^4 - 20x^3 + 7x^2 - x + 2 = 0$

Sono coniugati: x^5 e 2 $\quad$ $4x^4$ e $-x$ $\quad$ $-20x^3$ e $7x^2$

- E' reciproca un'equazione intera i cui coefficienti dei termini coniugati sono eguali, I specie, o opposti (con segno diverso), II specie.

$x^5 - 4x^4 + 20x^3 + 20x^2 - 4x + 1 = 0$ I specie

$x^5 - 4x^4 + 20x^3 - 20x^2 + 4x - 1 = 0$ II specie

-La reciproca di I specie, grado dispari, è divisibile per (x+1);
diventa poi reciproca I specie grado pari

- La reciproca di II specie è divisibile per (x-1); diventa poi reciproca I specie.

$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ Con Ruffini si divide per (x+1)

	a	+b	+c	+c	+b	+a
-1		-a	-b +a	-a +b -c	-b +a	-a
	a	b-a	a-b+c	b-a	a	0

Dai coefficienti è chiaro che si è passati da una reciproca di I specie di grado dispari a una di grado pari.

$ax^4 + (b-a)x^3 + (a-b+c)x^2 + (b-a)x + a = 0$ $\quad$ $x + 1 = 0$

E come risolvere una reciproca di I specie di grado pari?

- La reciproca di I specie grado pari (limitatamente al IV°) si risolve ponendo:

$$x + \frac{1}{x} = y \qquad e \qquad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ Si divide tutto per x^2 >>>> $ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$

[2] $a(x^2 + \frac{1}{x^2}) + b(x + \frac{1}{x}) + c = 0$ $\boxed{x + \frac{1}{x} = y}$ [3]

Elevando al quadrato si ha:

$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2$ >>>>> $\boxed{x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2}$

Sostituendo alla [2]: $a(y^2 - 2) + by + c = 0$

Da questa equazione si avranno due valori, y_1 e y_2

che saranno posti in eguaglianza con la [3]. Da cui due equazioni di II° con quattro risultati.

EQUAZIONE BINOMIA

E' binomia ogni equazione che si presenta così:

$\boxed{ax^n + b = 0}$ **con a e b reali e ≠ 0 e n intero > 2**

Si procede dividendo tutto per b >>>> $\frac{a}{b}x^n + 1 = 0$ **[1]**

Si pone: $\frac{a}{b}x^n = y^n$ **[2] e si sostituisce nella [1]**

$y^n + 1 = 0$

Si usano i prodotti notevoli per la scomposizione in fattori

Si trovano i valori di y, tanti quanti indicati da n

Si sostituiscono nella [2] e si trovano i valori di x

$64x^3 - 27 = 0$ >> $\frac{64}{27}x^3 - 1 = 0$ >> $\frac{64}{27}x^3 = y^3$ >> $y^3 - 1 = 0$

$(y - 1)(y^2 + y + 1) = 0$ >> $(y - 1) = 0$ $\mathbf{y_1 = 1}$

$(y^2 + y + 1) = 0$ >> $y = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ $\mathbf{y_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}}$ $\mathbf{y_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}}$

Si sostituisce nella [1] y_1, y_2, y_3

$\frac{64}{27}x^3 = y^3$ >> $\frac{4}{3}x_1 = y_1$ >> $\frac{4}{3}x_1 = 1$ >> $\mathbf{x_1 = \frac{3}{4}}$

$\frac{64}{27}x^3 = y^3$ >> $\frac{4}{3}x_2 = y_2$ >> $\frac{4}{3}x_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ >> $\mathbf{x_2 = \frac{3}{8}(-1 + i\sqrt{3})}$

$\frac{64}{27}x^3 = y^3$ >> $\frac{4}{3}x_3 = y_3$ >> $\frac{4}{3}x_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ >> $\mathbf{x_3 = \frac{3}{8}(-1 - i\sqrt{3})}$

EQUAZIONI IRRAZIONALI

E' irrazionale l'equazione che ha l'incognita sotto radice.

L'equazione irrazionale si risolve elevando al quadrato i due membri dell'equazione, dopo aver isolato in un membro la radice. Questa operazione può essere ripetuta più volte fino all'estinzione di tutte le radici.

Attenzione però: l'equazione che risulta dopo che si è elevato al quadrato, è prevalente, cioè ammette più soluzioni dell'equazione data, soluzioni che non sempre possono essere accettate. E' necessario perciò procedere alla sostituzione e verificare quale soluzione può essere accettata e quale no.

$2x + \sqrt{x-2} = 7$ [1]; $\sqrt{x-2} = 7 - 2x$; $x - 2 = 49 + 4x^2 - 28x$; $4x^2 - 29x + 51 = 0$

$x = \frac{29 \pm \sqrt{841-816}}{8}$ $x_1 = \frac{17}{4}$ $x_2 = 3$ Si verificano nella [1] le due radici sostituendo

Si sostituisce 3: $2(3) + \sqrt{3-2} = 7$ >> $6 + 1 = 7$ $7 = 7$ Il risultato $x_2 = 3$ risulta verificato

Si sostituisce $\frac{17}{4}$: $2(\frac{17}{4}) + \sqrt{\frac{17}{4} - 2} = 7$ >> $\frac{17}{2} + \frac{3}{2} = 7$ $10 = 7$ Il risultato $x_1 = \frac{17}{4}$ risulta non verificato

Se la radice fosse doppia si rende necessario elevare due volte al quadrato:

$\sqrt{x+5}$ + $\sqrt{2x+8}$ = 7; $(\sqrt{x+5})^2 = (7 - \sqrt{2x+8})^2$;

$$x + 5 = 49 + 2x + 8 - 14\sqrt{2x+8}$$

$14\sqrt{2x+8} = x + 3$; $(14\sqrt{2x+8})^2 = (x+3)^2$ ...